Mathematik für InformatikerInnen 2

Frank-Olaf Schreyer

Universität des Saarlandes, SS 2020

Ziele der heutigen Vorlesung: Abstrakte Vektorräume

- Körper
- Vektorraum-Axiome
- Untervektorräume
- lineare Unabhängigkeit und Erzeugung
- Dimension

$\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ sind Beispiele von Vektorräumen. Wir wollen Vektorräume nun in abstrakterer Form einführen, da deren Verwendung sehr häufig notwendig ist.
Zunächst einmal wollen wir für Skalare auch andere Zahlbereiche als $\mathbb{R}$ zulassen. Zum Beispiel kommen auch $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ und endliche Körper in Frage. Wir wiederholen kurz die Axiome von Körpern aus der MfI1.

Körperaxiome

Definition. Ein **Körper** ist ein Tupel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} +: \quad & K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a+b, \\ \cdot: \quad & K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a \cdot b, \end{aligned}$$

die folgenden Axiomen genügen:

K1: Axiome der Addition

K1.1 (Assoziativgesetz)

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall\, a,b,c \in K.$$

K1.2 (Existenz der Null)

$$\exists\, 0 \in K, \text{ so dass } 0+a = a \quad \forall\, a \in K.$$

K1.3 (Existenz des Negativen)

$$\forall\, a \in K \;\; \exists -a \in K, \text{ so dass } -a+a = 0 \quad (a-b := a+(-b)).$$

K1.4 (Kommutativgesetz)

$$a+b = b+a \quad \forall\, a,b \in K.$$

Körperaxiome, Teil 2

K2: Axiome der Multiplikation

K2.1 (Assoziativgesetz)

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in K.$$

K2.2 (Existenz der Eins)

$$\exists\, 1 \in K^* := K \setminus \{0\}, \text{ so dass } a \cdot 1 = a \quad \forall\, a \in K.$$

K2.3 (Existenz des Inversen)

$$\forall\, a \in K^* \quad \exists\, a^{-1} \in K, \text{ so dass } a \cdot a^{-1} = 1.$$

K2.4 (Kommutativgesetz der Multiplikation)

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall\, a, b \in K.$$

K3: Distributivgesetze (Punktrechung geht vor Strichrechnung)

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in K. \end{aligned}$$

Beispiel. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper.
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, da $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geq 2$ in $\mathbb{Z}$ kein Inverses hat.
Definition. Lassen wir in der Definition des Körpers das Axiom K2.3 weg, so erhalten wir die Axiome eines **kommutativen Rings mit 1**. Also ist $\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit 1.

Jeder Körper hat wenigstens zwei Elemente, nämlich das Nullelement und das Einselement.
Der Körper $\mathbb{F}_2$ mit genau zwei Elementen muss die folgenden Verknüpfungstafeln haben:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & & \\ 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & & \\ 1 & & \end{array}$$

In der Tat geben diese Verknüpfungen $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ die Struktur eines Körpers, in dem $1 + 1 = 0$ gilt.

Weitere endliche Körper

Beispiel. Für $a \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $\overline{a} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ den Rest bei der Division durch $p \in \mathbb{Z}$. Ist p eine Primzahl, dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p &:= \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\} \\ &= \text{die Menge der Reste bei der Division durch } p \text{ in } \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ein Körper (mit p Elementen) vermöge der folgenden Verknüpfungen:

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a+b}, \quad \overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}.$$

Bemerkung. Ist n eine zusammengesetzte Zahl, etwa eine echte Primzahlpotenz, dann ist $\mathbb{Z}/n := \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ kein Körper, sondern lediglich ein kommutativer Ring mit 1.

In $\mathbb{Z}/6$ gilt: $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$, und deshalb hat $\overline{2}$ kein Inverses.

Vektorraumaxiome

Definition. Sei K (genauer $(K,+,\cdot)$) ein Körper. Ein K-**Vektorraum** (kurz K–**VR**) ist ein Tupel $(V,+,\cdot)$, wobei V eine Menge ist, zusammen mit zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} + : \quad & V \times V \to V, \quad (v,w) \mapsto v+w \\ \cdot : \quad & K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v, \end{aligned}$$

die den folgenden Axiomen genügen:

VR 1: Axiome der Vektoraddition

VR 1.1 Assoziativität: $u+(v+w) = (u+v)+w \quad \forall\, u,v,w \in V$.

VR 1.2 Existenz der Null: $\exists\, 0 \in V$, so dass $0+v = v \quad \forall\, v \in V$.

VR 1.3 Existenz von Negativen:

$$\forall\, v \in V\, \exists -v \in V \text{ so dass } -v+v = 0.$$

VR 1.4 $v+w = w+v \quad \forall\, v,w \in V$.

Vektorraumaxiome, Teil 2

VR 2: Axiome der Skalarmultiplikation

VR 2.1 $\quad (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \quad \forall v \in V \quad \forall \lambda, \mu \in K.$

VR 2.2 $\quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$ gilt für das Einselement $1 \in K$.

VR 3: Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot v &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall v \in V, \\ \lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v, w \in V. \end{aligned}$$

Die Elemente $\lambda \in K$ heißen **Skalare**, die Elemente $v \in V$ heißen **Vektoren**.

Bemerkung. Verlangen wir nicht mehr, dass K ein Körper ist, sondern nur, dass $K = R$ ein (kommutativer) Ring mit 1 ist, so erhalten wir die Definition eines **(Links-)Moduls** über R.

Die Theorie der Moduln über einem Ring ist deutlich schwieriger als die der Vektorräume.

Beispiele von Vektorräumen

1. $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathbb{Q}^n$ ein $\mathbb{Q}$-VR und allgemein

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K \right\}$$

   ein K-Vektorraum, wenn K ein Körper ist.

2. Die Menge der Polynome

$$\mathbb{R}[x] := \{p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

   bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum: Seien
   $p = 5x^2 - 3x,\ q = x^3 + x - 1 \in \mathbb{R}[x]$. Dann ist:

$$\begin{aligned} p + q &= x^3 + 5x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{R}[x], \\ \frac{1}{2} \cdot p &= \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

3. Die Mengen

$$\begin{aligned} C^0[a,b] &= \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}, \\ C^1[a,b] &= \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}, \\ C^\infty[a,b] &= \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist unendlich oft diff'bar}\} \end{aligned}$$

sind $\mathbb{R}$-Vektorräume. Vektorräume von Funktionen spielen beispielsweise in der Bildbearbeitung eine Rolle.

$$\mathbb{R}^{[a,b]} := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

ist ebenfalls ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

4. Sei K ein Körper und M eine Menge. Dann ist

$$K^M := \{f\colon M \to K\}$$

ein K-Vektorraum.

Ende Teil 1

Vektorräume in der Kodierungstheorie

In der Kodierungstheorie verwendet man häufig Vektorräume über endlichen Körpern. Für einen endlichen Körper $K = \mathbb{F}_p$ und zwei Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^n$$

ist die **Hammingdistanz** durch

$$d(x, y) := |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$$

definiert. Beispielsweise ist

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2.$$

Vektorräume in der Kodierungstheorie, 2

In der Kodierungstheorie ist ein **Code** eine Teilmenge $C \subset \mathbb{F}_p^n$. Ein Element $x \in C$ heißt ein **Codewort**. Die **Minimaldistanz** von C ist

$$D = \min_{x,y \in C,\, x \neq y} d(x, y).$$

Rauscht der Kanal so wenig, dass man weniger als $\frac{D}{2}$ Fehler erwarten darf, dann können wir das Wort x aus dem übertragenen Wort y zurückbekommen, indem wir

$$z \in C \text{ bestimmen mit } d(z, y) = \min_{c \in C} d(c, y).$$

Bei weniger als $\frac{D}{2}$ Fehlern in der Übertragung gilt $z = x$.

Untervektorräume

Definition. Sei V ein K-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt **Untervektorraum** (kurz **UVR**), wenn Folgendes gilt:

1. $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$,
2. $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$.

Bemerkung.

(a) Insbesondere ist dann mit $u \in U$ auch $(-1) \cdot U = -u \in U$. Mit anderen Worten, die Abbildungen

1'. $+ \colon U \times U \to V,\ (u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2 \in U$,
2'. $\cdot : K \times U \to V,\ (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u \in U$.

haben Werte in U. Also $(U, +, \cdot)$ ist ebenfalls ein Vektorraum.

(b) Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, dann gilt $0 \in U$. Denn $U \neq \emptyset$ und somit: $\exists\, u \in U \Rightarrow -u \in U \Rightarrow 0 = -u + u \in U$.

Frage. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Untervektorräume?

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + 2x_2 = 0 \right\}, \\
U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_2 \geq 0 \right\}, \\
U_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_1 + x_2 \leq 1 \right\}, \\
U_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_1 + x_2 = 1 \right\}.
\end{aligned}
$$

Antwort. Nur U_1 ist ein UVR. U_2, U_3 und U_4 sind es nicht, da

2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$, aber $-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U_2$.
3. große skalare Vielfache von $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U_3$ mit $u_1 + u_2 > 0$ nicht in U_3 liegen.
4. $0 \notin U_4$.

Bemerkung.

1. Eine Gerade L (Hyperebene H) $\subset \mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum genau dann, wenn $0 \in L$, (bzw. $0 \in H$).
2. Sind $U, W \subset V$ Untervektorräume, dann ist auch $U \cap W \subset V$ ein Untervektorraum.
3. Der kleinste Untervektorraum von V ist der Nullraum $0 = \{0\}$.
4. Sind $U, W \subset V$ Untervektorräume, dann ist im Allgemeinen $U \cup W \subset V$ kein Untervektorraum.

   Beispiel. Seien $V = \mathbb{R}^2$ und

   $$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0 \right\}, \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 = 0 \right\}.$$

   Dann ist die Menge $U \cup W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \cdot x_2 = 0 \right\}$ kein Untervektorraum von V, denn:

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \cup W, \text{ aber } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U \cup W.$$

   $\square$

Dimension

Unser Ziel ist es, einen Dimensionsbegriff für abstrakte K-Vektorräume V zu entwickeln.
Wir wollen

$$\dim V \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

definieren.
Natürlich soll $\dim \mathbb{R}^n = n$ sein, und für $L, H \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade bzw. Hyperebene mit $0 \in L$ $(0 \in H)$ soll $\dim L = 1$ und $\dim H = n - 1$ gelten.
Anschaulich ist die Dimension gleich der minimalen Anzahl von Vektoren, die wir benötigen, um V aufzuspannen.

Definition.

1. Seien V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren. Eine **Linearkombination** von $v_1, \ldots, v_n$ ist ein Ausdruck

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in V,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

Erzeugendensystem

2. Zu $v_1, \ldots, v_n \in V$ bezeichnet

$$\begin{aligned}\langle v_1, \ldots, v_n \rangle &:= \mathrm{Spann}(v_1, \ldots, v_n) \\ &:= \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in K\} \subset V\end{aligned}$$

   den **Spann** von $v_1, \ldots, v_n$ (oder ausführlicher: den von $v_1, \ldots, v_n$ **aufgespannten Untervektorraum**).

   Wir setzen:

$$\langle \emptyset \rangle = \{0\} = 0.$$

   $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq V$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der $v_1, \ldots, v_n$ enthält.

3. $v_1, \ldots v_n$ **erzeugen** V, wenn $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$. Mit anderen Worten: $\forall\, v \in V \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \; v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Wir sagen auch, die Familie $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ bildet ein **Erzeugendensystem** von V.

Lineare Unabhängigkeit

4. Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, wenn $\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gilt:

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

   Andernfalls heißen $v_1, \dots, v_n$ **linear abhängig**.

Beispiel. $V = \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die vier Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) v_1, v_2 sind linear unabhängig:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(b) v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig, zum Beispiel: $1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 0$, also sogar v_1, v_2, v_3 sind schon linear abhängig.

Wir werden noch sehen, dass die lineare Abhängigkeit der vier Vektoren klar ist, weil deren lineare Unabhängigkeit schon aus Dimensionsgründen nicht sein kann.

(c) v_1, v_2, v_4 sind linear unabhängig, weil

$$0 = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\\ \lambda_1 + \lambda_3\\ \lambda_2 + \lambda_3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_1 = -\lambda_2$ wegen der 2. und 3. Komponenten. Eingesetzt in die erste Komponente ergibt sich:

$$\lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_1 = \lambda_1 = 0 \ \Rightarrow \lambda_2 = 0 \ \Rightarrow \lambda_3 = 0.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(d) v_1, v_2, v_4 bilden ein Erzeugendensystem, weil sich jeder Vektor v, etwa $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

liefert nämlich ein lineares Gleichungssystem,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

welches eine Lösung hat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung. Genauer gilt:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - (b_1 - b_2) - (b_3 + b_2 - b_1) \\ b_1 - b_2 \\ b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_1 - b_2 \\ b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix}.$$

Fazit: Lineare Abhängigkeit und Erzeugung zu entscheiden, läuft darauf hinaus, lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Ende Teil 3

Der Vektorraum von Polynomen vom Grad $\leq d$

Definition. Sei $V = \mathbb{R}[x] = \{$ **alle Polynome** $\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome. Für ein Polynom

$$p = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

heißen die a_i **Koeffizienten von p**. Ist $a_d \neq 0$, dann hat p den **Grad** $\deg p := d$. Wir setzen $\deg 0 := -\infty$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]_{\leq d} &:= \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq d\} \\ &= \{a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d}, \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \mapsto a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$$

ist eine Bijektion, da ein Polynom eindeutig durch die Koeffizienten bestimmt ist. Wir sagen $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ und $\mathbb{R}^{d+1}$ sind **isomorph**, in Zeichen $\mathbb{R}[x]_{\leq d} \cong \mathbb{R}^{d+1}$, vermöge dieser Abbildung. Dazu später mehr.

Basen

Definition. Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien Vektoren. Wir sagen $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine **Basis** von V, wenn

1. $v_1, \ldots, v_n$ den Vektorraum V erzeugen und
2. $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

Beispiel. Die vier Polynome $1, x, x^2, x^3$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
$\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ hat noch weitere Basen. Zum Beipiel für einen beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$ bilden auch die Polynome

$$1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^3$$

eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, die wir bei Taylorpolynomen dritter Ordnung mit Entwicklungspunkt a im letzten Semester verwendet hatten.

Standardbasis des K^n

Beispiel. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis von K^n:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n$$

Jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

lässt sich als Linearkombination von $e_1, \ldots, e_n$ darstellen, und die Linearkombination ergibt den Nullvektor genau dann, wenn alle Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ gleich Null sind. Wir nennen diese Basis die **Standardbasis** von K^n.

Definition der Dimension

Definition. Sei K ein K-Vektorraum. Die **Dimension** von V ist n, in Zeichen

$$\dim V = n,$$

wenn V eine Basis aus n Vektoren $v_1, \dots, v_n$ besitzt. Andernfalls setzen wir $\dim V = \infty$. Der Nullvektorraum $0 = \{0\}$ hat die Dimension 0, da die leere Menge eine Basis bildet.

Beispiel. $\dim K^n = n$, da $e_1, \dots, e_n$ eine Basis aus n Vektoren ist.

Bemerkung. Diese Definition ist nicht unproblematisch, da Vektorräume in der Regel viele verschiedene Basen haben. Zum Beispiel sind $1, x, x^2, x^3$ und $1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^3$ beides Basen von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Glücklicherweise bestehen beide Basen aus vier Elementen, so dass unsere Definition beides Mal

$$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = 4$$

ergibt.

Ende Teil 4