



Übungen zur Vorlesung Mathematik für InformatikerInnen 2

Sommersemester 2020

Das Ferienblatt wird nicht mehr abgegeben und bewertet.

Ferienblatt

09.07.2020

Aufgabe 1. Seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

- (a) $U^{\perp\perp} = U$,
- (b) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$,
- (c) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

Aufgabe 2. Sei $U = \langle (1 \ 1 \ 0 \ 0)^t, (0 \ 0 \ 1 \ 1)^t \rangle$ ein Untervektorraum des \mathbb{R}^4 .

- (a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .
- (b) Geben Sie die darstellende Matrix der orthogonalen Projektion $p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ auf U bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ an.

Aufgabe 3. Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, die die folgenden Vektoren aufeinander abbildet.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d)

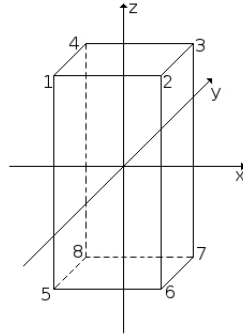
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf $\text{Bild}(A)$.
- (b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $(\ker(A))^{\perp}$.
- (c) Bestimmen Sie die Pseudoinverse A^+ von A .

Aufgabe 5. Seien $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen und $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$. Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von V . Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_B^B(\varphi)$ der linearen Matrix $\varphi : V \rightarrow V, A \mapsto M \cdot A$.

Aufgabe 6. Wir betrachten den Quader Q mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 2) \in \mathbb{R}^3$, dessen Schwerpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt:



- Welche Ordnung hat die Symmetriegruppe G des Quaders Q ?
- Welche Bahnlängen können auftreten?
- Wir fassen G als Untergruppe von $O(3) = \{S \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det(S) = \pm 1\}$ auf. Geben Sie die Elemente von G als Untergruppe von $O(3)$ an.
- Wir fassen G als Untergruppe von S_8 auf, indem wir die Ecken durchnummerieren. Geben Sie die Elemente von G als Untergruppen von S_8 an.

Aufgabe 7. (a) Zeigen Sie, dass die $n \times n$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\det(A) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}$ hat.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Aufgabe 9. Bestimmen Sie über $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5$ die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_5)^{4 \times 4}.$$

Aufgabe 10. Welche der folgenden Matrizen sind über \mathbb{Q} , \mathbb{R} oder \mathbb{C} diagonalisierbar, welche sind nicht diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$