**Fakultät MI, Fachrichtung Mathematik**
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Michael Hoff

# Übungen zur Vorlesung Mathematik für InformatikerInnen 2

Sommersemester 2020

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt per Email bis zum **27.05.2020, 10 Uhr** vor der Vorlesung. Senden Sie Ihre Lösungen an den Tutor Ihrer Übungsgruppe. Auf der Vorlesung-homepage finden Sie die Emailadressen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

**Blatt 3** 20.05.2020

**Aufgabe 1** (Lineare Unabhängigkeit).

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind. Bestimmen Sie in jedem Fall die Dimension des aufgespannten Raumes und geben Sie eine Basis an.

(i) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_2)^3.$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

(iii) $\begin{pmatrix}5\\0\\5\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-5\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-5\\10\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\\5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix}2\\\lambda\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\lambda\\4\\-3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig?

Stellen Sie für diese $\lambda$ den letzten Vektor als Linearkombination der ersten beiden dar.

**Aufgabe 2** (Untervektorräume). Welche der folgenden Mengen $U_i$ sind Untervektorräume der Vektorräume $V_i$? Berechnen Sie in diesen Fällen auch deren Dimension.

(a) $V_1 := \mathbb{R}^5,\ U_1 := \{p \in \mathbb{R}^5 \mid \ ||p|| = 1\}.$
(b) $V_2 := \mathbb{R}^4,\ U_2 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w = 0,\ w = 0\}.$
(c) $V_3 := \mathbb{R}^3,\ U_3 := \left\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, (1,2,3)^{\mathrm{t}}\rangle = 0\right\}.$
(d) $V_4 := \mathbb{R}^4,\ U_4 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x+y)\cdot(x-y) = 0\}.$
(e) $V_5 := \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{ax^3+bx^2+cx+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\},\ \ U_5 := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid b+d = 0,\ a+c = 0\}.$

**Aufgabe 3** (Basen). Sei $\mathbb{F} := \mathbb{F}_5$ der Körper mit fünf Elementen.

(a) Wie viele Elemente hat $\mathbb{F}^3$?
(b) Wie viele verschiedene Basen hat $\mathbb{F}^3$?

**Aufgabe 4** (Austauschbarkeit von Basiselementen)**.**

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$V := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, v_2$ und $v_3$ linear unabhängig sind.

(b) Ist es möglich, einen der Vektoren $v_1, v_2, v_3$ durch $v = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ auszutauschen? Wenn ja, welchen?

(c) Ist es möglich, einen der Vektoren $v_1, v_2, v_3$ durch $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ auszutauschen? Wenn ja, welchen?

(d) Finden Sie einen Vektor $v_4 \in \mathbb{R}^4$, der $v_1, v_2, v_3$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzt.