Fakultät MI, Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Vorlesung Mathematik für InformatikerInnen 2

Sommersemester 2020

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt per Email bis zum **03.06.2020, 10 Uhr** vor der Vorlesung. Senden Sie Ihre Lösungen an den Tutor Ihrer Übungsgruppe. Auf der Vorlesunghomepage finden Sie die Emailadressen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

Blatt 4 27.05.2020

Aufgabe 1 (Basen von Untervektorräumen)**.** Seien

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

Aufgabe 2 (Gauß-Algorithmus)**.**

(a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

(b) Invertieren Sie die 4×4 Matrix aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 3 (Matrixdarstellung einer linearen Abbildung)**.**
Für eine Menge N bezeichne $\mathrm{id}_N \colon N \to N$ die identische Abbildung. Sei $V := \mathbb{R}[t]_{\leq d}$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung

$$A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$$

von id_V bzgl. der Basen $\mathcal{A} := \{1, t-\alpha, \ldots, (t-\alpha)^d\}$ und $\mathcal{B} := \{1, t, \ldots, t^d\}$.

Aufgabe 4 (Kern und Bild)**.**

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild derjenigen linearen Abbildungen, die durch folgende Matrizen definiert werden. Überprüfen Sie die Dimensionsformel für diese Beispiele.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kurze Begründung:

(1) $\mathrm{Ker} A \subset \mathrm{Ker} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (2) $\mathrm{Ker} A \supset \mathrm{Ker} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
(3) $\mathrm{Bild} A \subset \mathrm{Bild} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (4) $\mathrm{Bild} A \supset \mathrm{Bild} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.