Fakultät MI, Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Vorlesung Mathematik für InformatikerInnen 2

Sommersemester 2020

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt per Email bis zum **17.06.2020, 10 Uhr** vor der Vorlesung. Senden Sie Ihre Lösungen an den Tutor Ihrer Übungsgruppe. Auf der Vorlesung-homepage finden Sie die Emailadressen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeits-gruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

Blatt 6 10.06.2020

Aufgabe 1 (Invertierbarkeit von Matrizen)**.** Zeigen Sie:

(a) Die *Vandermondsche Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^d \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \dots & \alpha_d^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $\alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.

(b) Berechnen Sie die Derterminante $\det(A)$ der Vandermondschen Matrix.

Aufgabe 2 (Isomorphismen)**.** Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung, die durch unten stehende Matrix $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ definiert wird, ein Isomorphismus?

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{7}t & \frac{5}{2}t & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -7t & 8 & -2t \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 2 & \frac{1}{3} & t \\ 0 & 0 & 3 & 2t & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Determinanten und Geometrie)**.**
Gegeben seien 3 Punkte $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, die nicht auf einer Geraden liegen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \text{ für } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

eine Ebene definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\widetilde{H} = \{(x_1, \ldots, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = 0\}$$

gleich der Ebene H ist. Hierzu müssen Sie insbesondere zeigen, dass $\widetilde{H}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 4. (a) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a+3 & 0 \\ 2 & a+4 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar?

(b) Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}, b := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3.$$

Für welche Primzahlen p ist das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ lösbar?