UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Jens Römer

Übungen zur Vorlesung Algebraische Topologie

Wintersemester 2013/14

Blatt 10 6. Januar 2014

Sei $\Delta \subset \Delta_n = 2^{\{0,\dots,n\}}$ ein abstrakter simplizialer Komplex und $S = K[x_0, \dots, x_n]$ der Polynomring in $n+1$ Variablen über einem Körper K. Für jede Teilmenge $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$ bezeichne

$$x^\sigma = \prod_{i \in \sigma} x_i$$

das zugehörige quadratfreie Monom in S und

$$I(\Delta) = \langle x^\sigma \mid \sigma \notin \Delta \rangle$$

das quadratfreie monomiale Ideal in S, welches von Monomen zu den Nichtseiten von Δ erzeugt wird. Der Restklassenring $K[\Delta] = S/I(\Delta)$ heißt **Stanley-Reisner Ring** von Δ.

Aufgabe 1. Zeigen Sie,

$$\Delta \mapsto I(\Delta)$$

definiert eine Bijektion zwischen den Unterkompexen von Δ_n und den quadratfreien monomialen Idealen in $K[x_0, \dots, x_n]$.

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie eine minimale freie Auflösung von $\mathbb{Q}[\Delta]$ als S-Modul zu den Triangulierungen Δ von S^2, die vom Oktaeder oder Würfel induziert werden.

(b) Zeigen Sie, dass die minimale freie Auflösung von $K[\Delta]$ für Δ die Standardtriangulierung von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ von der Charakteristik von K abhängt, indem sie die Auflösung für $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_2$ berechnen.
Sie dürfen die Computeralgebra-Systeme Macaulay2 oder Singular benutzen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie

$$I(\Delta) = \bigcap_{\sigma \in \Delta \text{ eine Facette}} \langle x_i \mid i \notin \sigma \rangle$$

Aufgabe 4. Sei $G = (V, E)$ mit Eckenmenge $V = \{0, \dots, n\}$ und Kantenmenge $E \subset \binom{V}{2}$. Dann heißt

$$I(G) = \langle x_i x_j \mid \{i, j\} \in E \rangle$$

das Graph-Ideal von G. Interpretieren Sie die Nullstellenmenge von $I(G)$ mit Hilfe des Komplementär-Graphen $G^c = (V, E^c)$, wobei $E^c = \binom{V}{2} \setminus E$.

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 13.1.2014 vor der Vorlesung abzugeben.