UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Jens Römer

Übungen zur Vorlesung Algebraische Topologie

Wintersemester 2013/14

Blatt 2 28. Oktober 2013

Aufgabe 1. Beweisen Sie das Lemma von Lebesgue. Für jede kompakte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ und jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ von X gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle Punkte $p \in X$ ein $U_i \in \mathfrak{U}$ gibt mit $B_\varepsilon(p) \cap X \subset U_i$.

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^9$. Gegeben sei der geschlossene Weg

$$\alpha : [0,1] \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}), t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\alpha * \alpha \sim \varepsilon_{\mathrm{id}}$.

Aufgabe 3. Geben Sie Beispiele für topologische Räume X und Y an, X lokal wegzusammenhängend und Y wegzusammenhängend, so dass gilt:

a) $\mathrm{Deck}(Y/X) = \{\mathrm{id}_Y\}$ und $X \ncong Y$.
b) $\mathrm{Deck}(Y/X) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
c) $\mathrm{Deck}(Y/X) = S_3$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein Teilraum und $\iota : A \to X$ die Inklusionsabbildung. A heißt **Deformationsretrakt** von X, falls es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$ und $\iota \circ r \sim \mathrm{id}_X$ gibt.
A heißt **starker Deformationsretrakt** von X, falls es eine Homotopie $H : [0,1] \times X \to X$ mit $H(0,x) = (\iota \circ r)(x)$ und $H(1,x) = \mathrm{id}_X$ gibt, so dass $H(t,a) = a$ für alle $t \in [0,1]$ und $a \in A$.
Zeigen Sie:

a) Sei A ein starker Deformationsretrakt von X und $a \in A$. Dann gilt:
$$\pi_1(A,a) \cong \pi_1(X,a).$$
b) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ ist ein starker Deformationsretrakt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 04.11.2013 vor der Vorlesung abzugeben.