UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Jens Römer

Übungen zur Vorlesung Algebraische Topologie

Wintersemester 2013/14

Blatt 8 9. Dezember 2013

Aufgabe 1. a) Gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to 0\ ?$$

b) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen A, für die es eine kurze exakte Sequenz der Gestalt

$$0 \to \mathbb{Z}_{p^m} \to A \to \mathbb{Z}_{p^n} \to 0$$

gibt, wobei p eine Primzahl sei.

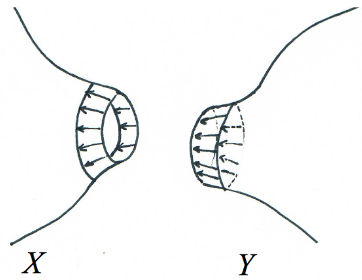
Aufgabe 2. Berechnen Sie jeweils die Homologiegruppen von $T = S^1 \times S^1$ und $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz.

Aufgabe 3. Seien X, Y topologischer Räume, $X_0 \subset X$ ein Unterraum und $\varphi : X_0 \to Y$ eine stetige Abbildung. Auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ ist durch $x \sim \varphi(x)$ eine Äquivalenzrelation gegeben. Wir nennen $X \sqcup Y/\sim$ die Verklebung von X und Y entlang φ. Seien nun X und Y zwei zusammenhängende n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Wir definieren die zusammenhängende Summe $X \# Y$ wie folgt:
Seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Bezeichne mit $B_r(x)$ den offenen Ball um x mit Radius r in einer Karte, die x enthält. Dann verkleben wir $X \setminus B_{\frac{1}{2}}(x)$ mit $Y \setminus B_{\frac{1}{2}}(y)$ entlang

$$\varphi : B_2(x) \setminus B_{\frac{1}{2}}(x) \to B_2(y) \setminus B_{\frac{1}{2}}(y),$$

wobei φ vermöge $B_2(x) \setminus B_{\frac{1}{2}}(x) \cong S^{n-1} \times [\frac{1}{2}, 2]$ gegeben ist durch

$$\varphi : S^{n-1} \times [\frac{1}{2}, 2] \to S^{n-1} \times [\frac{1}{2}, 2], (p, t) \mapsto (p, \frac{1}{t}).$$



Berechnen Sie $\pi_1(X \# Y)$ in Termen von $\pi_1(X)$ und $\pi_1(Y)$.

Aufgabe 4. Sei R ein noetherscher Ring und M, N R-Moduln.

a) Eine freie Auflösung eines R-Moduls M ist ein exakter Komplex:

$$F : \cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0$$

mit $\operatorname{coker}(F_1 \to F_0) \cong M$ und jedes F_i ist ein freier R-Modul.
Zeigen Sie, dass jeder endlich erzeugte R-Modul eine freie Auflösung mit endlich erzeugten freien R-Moduln F_i besitzt.

b) Sei $F_\bullet$ eine freie Auflösung von M. Der Komplex $F_\bullet \otimes_R N$ ist gegeben durch:

$$\cdots \to F_2 \otimes_R N \to F_1 \otimes_R N \to F_0 \otimes_R N.$$

Wir definieren $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) := M \otimes_R N$ und $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) := H_i(F_\bullet \otimes_R N)$ für $i \geq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Tor}_i^R(-,N) : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$$

ein wohldefinierter Funktor in der Kategorie der R-Moduln ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$.

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 16.12.2013 vor der Vorlesung abzugeben.