UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 08.01.2014 vor der Vorlesung abzugeben.

Blatt 10 18. Dezember 2013

Aufgabe 1 (Stetigkeit)**.** Die drei Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien folgendermaßen definiert:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \\
g(x) &= \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \\
h(x) &= \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Q} \text{ teilerfremd, } q > 0, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie: f ist nur in $\frac{1}{2}$ stetig, g ist nirgendwo stetig und h ist genau in allen irrationalen x stetig.

Aufgabe 2 (Stetige Funktionen)**.**

(a) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt?

(b) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau dreimal annimmt?

Aufgabe 3 (Produktregel)**.** Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n Mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Aufgabe 4 (Mehrfache Nullstellen)**.** Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat $f(x) = x^3 - ax + b$ eine doppelte Nullstelle (d.h. eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = f'(x_0) = 0$)? Für welche a, b hat die Funktion genau eine, zwei bzw. drei reelle Nullstellen?

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!!!