



Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 22.01.2014 vor der Vorlesung abzugeben.

Blatt 12

15. Januar 2014

Aufgabe 1 (Konkave Funktionen). Seien I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine konkave Funktion und $x_1, \dots, x_n \in I$.

(a) Zeigen Sie,

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n} \leq f\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right).$$

(b) Folgern Sie die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}.$$

(Hinweis: Wählen Sie $f = \ln$.)

Aufgabe 2 (Wachstumsverhalten gegen Unendlich). Sortieren Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^{\ln x} & f_4(x) &= 3^x \\ f_2(x) &= e^{x \ln x} & f_5(x) &= x^3 \\ f_3(x) &= x^x & f_6(x) &= e^x \ln x \end{aligned}$$

nach dem Wachstum für $x \rightarrow \infty$ (Begründung!).

Aufgabe 3 (Grenzwerte). (a) Zeigen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + e^x + e^{-x} - 4}{x^4} = \frac{1}{6},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2} = \frac{b^2 - a^2}{4} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

Prüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

(b) $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\cot x},$

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)},$

(d) $\lim_{x \searrow 1} (\ln(x) \cdot \ln(1-x)).$

Aufgabe 4 (Die Eulersche Zahl). Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln(1 + \frac{1}{n})) = 1$ und folgern Sie daraus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$