UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 27.11.2013 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 6 20. November 2013

Aufgabe 1 (Karatsubas Algorithmus)**.** Der klassische Multiplikationsalgorithmus für zwei Zahlen a und b mit höchstens $n = 2^k$ Bits benötigt $O(n^2)$ viele Schritte. Karatsubas Algorithmus funktioniert wie folgt:

- **Input:** Zwei Zahlen a und b mit höchstens $n = 2^k$ Bits.
- Zerlege $a = a_1 + a_2 2^{\frac{n}{2}}$ und $b = b_1 + b_2 2^{\frac{n}{2}}$.
- Berechne rekursiv $c_1 = a_1 b_1$, $c_3 = a_2 b_2$, $c_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - c_1 - c_3$.
- Gebe als Ergebnis $c = c_1 + c_2 2^{\frac{n}{2}} + c_3 2^n$ zurück.

Zeigen Sie: Die Laufzeit des Algorithmus ist in $O(n^{\log_2 3}) \subset O(n^{1,59})$.

Aufgabe 2 (Die Landau–Symbole)**.** Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) $\frac{n^3+n+1}{2n^2-5} \in O(n)$.
(b) $\frac{n^3+n+1}{2n^2-5} \in o(n)$.
(c) $\frac{2n-5}{20n\sqrt{n}+1000} \in O\left(\frac{1}{n}\right)$.
(d) $\frac{20n\sqrt{n}+1000}{2n-5} \in O(n)$.

Aufgabe 3 (Quantoren und ε)**.** Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Welche Implikationen bestehen zwischen den folgenden sechs Aussagen?

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(b) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(c) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 :\ \forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(d) $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 :\ \forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(e) $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0 :\ \forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(f) $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0 :\ \exists n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$.

Geben Sie Beispiele von Folgen an, die zeigen, dass weitere Implikationen nicht bestehen.

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folgen:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}, \\ b_n &= \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \\ c_n &= \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für $1 \leq n < 1.000.000$ gilt $a_n > b_n > c_n$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.