21.10.14

Mathe für Naturwissenschaftler I

<u>Def:</u> Eine Menge M ist eine Kollektion von wohlbestimmten Objekten (Elemente).

<u>Zwei Möglichkeiten Mengen zu spezifizieren:</u>

- Aufzählung der Elemente: <u>Bsp:</u> $M = \{1,2,3,4,5\}$
- Durch eine charakterisierende Eigenschaft: <u>Bsp:</u> $M' = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 6\}$

Dabei schreiben $x \in M$ (für x ist ein Element von M), $x \notin M$ (x ist kein Element von M)

Reihenfolge bei Aufzählung spielt keine Rolle

$\{1,2,3,4\} = \{1,3,4,2\} = \{1,2,3,4,2^2\}$

Zwei Mengen M,N sind gleich, wenn $x \in M \Leftrightarrow x \in N$

zB: oben $M = M'$!

<u>Wichtige Mengen Mengen sind:</u>

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ | $\mathbb{N}_0 = \{1,2,3,\dots\}$, natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$, ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, rationale Zahlen

$\mathbb{R} = \{$unendliche Dezimalzahlen$\}$, reelle Zahlen

später $\mathbb{C}$, komplexe Zahlen

X, Y Mengen, dann heißt X eine Teilmenge in Y in Zeichen $X \subset Y$ (oder $X \subseteq Y$) wenn $x \in X \Rightarrow x \in Y$ gilt.

X heißt echte Teilmenge in Y, wenn $X \subset Y$ und $X \neq Y$. Schreibweise $X \subsetneq Y$

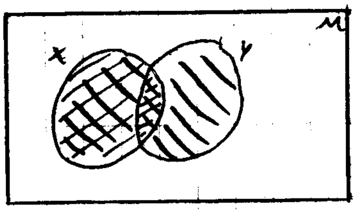
$X \not\subset Y$ heißt X ist keine Teilmenge in Y. Bsp: $\{1,2\} \not\subset \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

<u>Def.</u> Durchschnitt, Vereinigung, Differenz (X & Y zwei Mengen)

<u>$X \cap Y$</u> $= \{a \mid a \in X$ und $a \in Y\}$

<u>$X \cup Y$</u> $= \{a \mid a \in X$ oder $a \in Y\}$

<u>$X - Y$</u> $= \{a \mid a \in X$ und $a \notin Y\}$

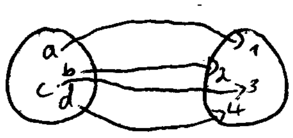


Beim "oder" in der Mathematik heißt nicht entweder oder sondern $a \in X$ oder $a \in Y$, heißt a ist in wenigstens einer Menge enthalten. "$a \in X$ oder $a \in X$" $\Leftrightarrow$ "$a \in X$"

$\emptyset = \{\ \}$ bezeichnet die leere Menge. $\emptyset \subset X$ gilt für jede Menge X.

<u>Def.</u> (Abbildung) Es seien X und Y zwei Mengen. Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist eine Vorschrift die jedem Element $x \in X$ ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet. Schreibweise $x \mapsto y = f(x)$

Bsp: Matrikelnummer {Studierende der UdS} $\mapsto \mathbb{N}$



Wertetabelle

x	a	b	c	d
$f(x)$	1	2	3	4

X heißt Defbereich der Abb., Y Wertebereich von f.

In der Schule: Abbildung von $D \subset \mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{R}$

$f: D \to \mathbb{R}$ Abb. mit Werten in $\mathbb{R}$ oder später $\mathbb{C}$ nennt.

<u>Funktionen</u>

Typische Schulaufgabe: f sei durch eine Formel definiert. Bestimme den Defbereich.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$

Die Formel macht nur Sinn, wenn der Nenner $\neq 0$!

Also: $D_{max} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

$f: D_{max} \to \mathbb{R}$

Wichtig ist, dass der Fktwert $f(x)$ durch f und x eindeutig definiert ist.

Bsp: "Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ sei $f(x)$ eine Wurzel aus x, d.h. ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y^2 = x$"

Dies ist keine Definition einer Fkt., da wir nicht wissen ob $+\sqrt{x}$ oder $-\sqrt{x}$ nehmen sollen

Bsp: "Für $x \in \mathbb{R}$ sei $y = f(x)$ die pos. Quadratwurzel von x".

Dies ist keine gültige Def, da für $x < 0$ keine Quadratwurzel (in $\mathbb{R}$) existiert.

Bsp: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ sei $y = f(x)$ die pos. Quadratwurzel in x definiert eine Funktion

$f: \mathbb{D}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

In den Naturwissenschaften hängen die meisten Fkt. von mehreren Variablen ab.

Bsp: $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ / $pV = n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p}$

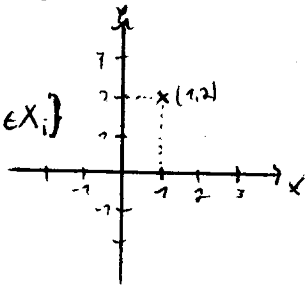
Um diese als Abbildung aufzufassen, brauchen wir das kartesische Produkt von Mengen.

Def: (kartesisches Produkt) X, Y zwei Mengen, dann bezeichnet

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ die Menge der geometrischen Paare $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \in X \times Y$

Bsp: Das Produkt $\{a, b, \ldots, h\} \times \{1, 2, \ldots, 8\}$ im Schach gebräuchlich

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ verwendet als Koordinaten für die Ebene

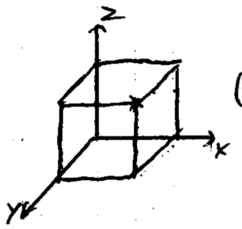


Allgemein: $X_1, \ldots, X_n$ Mengen $X_1 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\}$

speziell $M^n = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n \text{ Kopien}}$ die Menge der n-Tupel aus M

21.10.14

$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$



(2,1,2)

Also die häufigsten Abb. sind Fkt d. Art

$f: D\to\mathbb{R}\ ,\ D\subset\mathbb{R}^n$

Der schönste Defbereich $D\subset\mathbb{R}^n$ sind dabei Quader.

$D=\{x=\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\mid b_i\le x_i\le c_i\}$ für $b_1\le c_1,\ b_n\le c_n$

Bsp: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

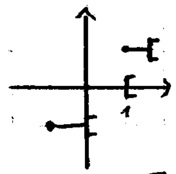
$f_1(m,v)=\frac{1}{2}m\cdot v^2$ kin. Energie
m, Masse; v, Gkeit

$f_2(m,h)=m\cdot g\cdot h$ pot. Energie
h, Höhe; g = Erdbeschl.

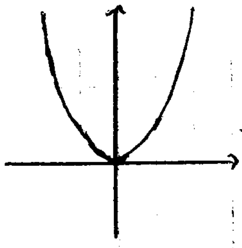
Def: (Graphen einer Funktion)

$f:D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}^n$ eine Fkt., Dann heißt $\mathrm{Graph}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid x\in D, y=f(x)\}$ der Graph v. f.

Bsp: entier: $\mathbb{R}\to\mathbb{Z}\subset\mathbb{R},\ x\mapsto\lfloor x\rfloor$ ganzer Anteil



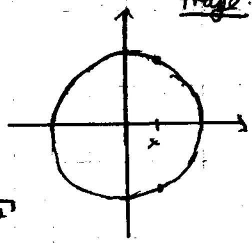
Graph (entier)



Bsp: $y=x^2=f(x)$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

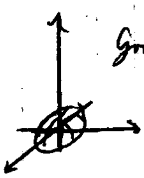
Frage: Ist d. Kreis der Graph einer Fkt?



Nein! (zwei Werte!)

Aber! Halbkreis ($f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

Bei Funktionen auf $D\subset\mathbb{R}^2$ ist den Graphen zu zeichnen schwierig



Graph(f) = obere Halbkugel

$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$

Recht bald wird in der Chemievorlesung der Begriff der part. Abl. benötigt.

Situation $f: D\to\mathbb{R}$ mit $D\subset\mathbb{R}^n$ sei eine Fkt. und $a=(a_1,\dots,a_n)\in D$ Für jedes $i\in\{1,\dots,n\}$ existiert $b_i<a_i<c_i$, sodass die Menge $M_i(b,c)=\{(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)\mid b_i<x_i<c_i\}\subset D$

Bsp: $(1,2)\subset$  Dann ist $g(x_i)=f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$ eine Fkt von einer Variablen.

Ist nun g eine diffbare Funktion, dann definiere $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)=g'(a_i)$.

Bsp: $f(x,y,z)=x^2+y^2+3xy+z^3$ $D=\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y\ ;\ \frac{df}{dy}=2y+3x\ ;\ \frac{df}{dz}=3z^2$$

Alg.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ heißt i-te Partielle Ableitung. Ist diese in jedem Punkt $a\in D$ def. und erneut partiell diffbar. $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ 2-te partielle Ableitung

Bsp: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{(\partial z)^2} = 6z$

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Defbereich so das jeden Punkt $a \in D$ in einer Verallg. offenen Quader $Q = \{x_1, \dots, x_n) \mid b_i < x_i < c_i\} \subset D$ der in D enthalten ist. $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt die zweimal stetig part. diffbar ist, dann gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Defbereich einer Fkt $f: D \to \mathbb{R}$, der folgende Bedingung erfüllt: 24.10.14

- Für jeden Punkt $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ existiert ein offener Quader $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid b_i < x_i < c_i\}$ so dass $a \in Q \subset D$
- Dann lässt sich für jedes i eine Fkt $g:]b_i, c_i[\to \mathbb{R}$ definieren durch $g(x_i) = f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$

Ist g im Punkt a_i differenzierbar mit Ableitung $g'(a_i)$ dann definieren $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) := g'(a_i)$

Trifft dies für alle i zu, so heißt f im Punkt a partiell diffbar. Trifft dies für alle $a \in D$ zu, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \to \mathbb{R}$ eine neue Fkt.

f heißt 2x stetig partiell diffbar auf D, wenn alle 2-ten partiellen Abl. $\frac{\partial f}{\partial x_i} \to \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}: D \to \mathbb{R}$ definiert sind und darüberhinaus stetig sind.

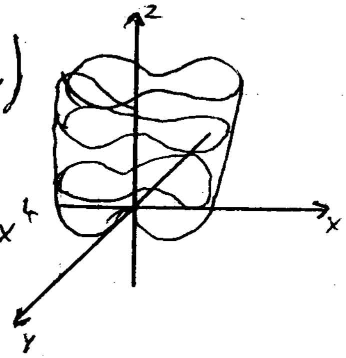
Satz: Ist $f: D \to \mathbb{R}$ 2x stetig partiell diffbar, dann gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$

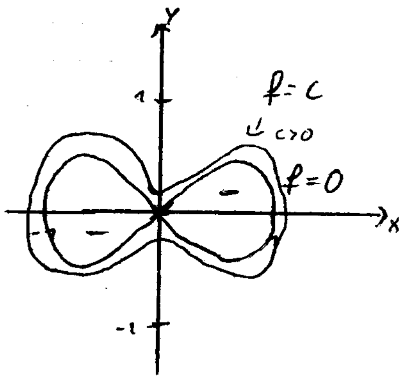
Mit anderen Worten die Matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ ist symmetrisch

Bsp: $f(x,y) = xe^y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 - x^2 + x^4$





Def. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ partiell diffbar auf D und $a \in D$. Dann heißt der Vektor $(\text{grad } f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ Gradient von f an der Stelle a

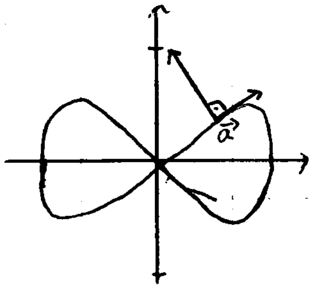
Bsp: $f(x,y) = y^2 - x^2 + x^4$, $\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\text{grad} f =} = (-2x + 4x^3, 2y)$

$a = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \in \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\} = \{f = 0\}$

$0 = y^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = y^2 - \frac{3}{16}$ $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx (0{,}5, 0{,}43)$

24.10.14 $(\text{grad} f)(a) = (-1+\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (-0{,}5,\ 0{,}86)$

Satz: Der Vektor grad $f(a)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge $V_c := \{f=c\}, c = f(a)$



Betrachte Abbildungen

$g: D \to \mathbb{R}^n$

$\hat{\mathbb{R}}$

Bsp. $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$ sind alle Komponenten g_i diffbar, dann definiere den Gleitvektor der Teilchen $g(t)$ zum Zeitpunkt $t=b$

$(g_1'(b), g_2'(b), \ldots, g_n'(b)) \in \mathbb{R}^n$

Bsp: $g' = (-\sin t, \cos t, 1)$

Beweisidee: Sei $g:]\alpha, \beta[\to D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abb. die auf der Niveaumenge $V_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$ bleibt und durch den Punkt $a \in D$ geht.

Wir betrachten die Komposition $h(t) = f(g(t))$

Dann gilt $h(t)$ ist die konstante Fkt $h(t) = c \quad \forall t \in]\alpha, \beta[$

Also:

$0 = h' = \frac{dh}{dt}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$

Kettenregel für Differentiation.

$g:]\alpha, \beta[\to D \subset \mathbb{R}^n,\ f: D \to \mathbb{R}$ die Komponenten in g seien (in t_0) diffbar, und f sei stetig partiell diffbar.

$$f(g(t))' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\, g_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))\, g_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \frac{\partial x_i}{\partial t}(t)$$

$x_1(t) = g_1(t), \ldots, x_n(t) = g_n(t)$

Kettenregel:

$0 = h'(t) = \text{grad} f(g(t)) \cdot g'(t)$

Also $(\text{grad} f)(a)$ steht senkrecht auf allen Geschw.vektoren $g'(t)$ von Kurven auf der Niveaumenge, also allen Tangentialvektoren

Def: Sei $g: A \to B$ eine Abbildung; $f: B \to C$ Abb. Dann definieren wir die Komposition

$$f \circ g : A \to C$$

durch $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

Eine Abb. $f: A \to B$ heißt umkehrbar wenn es eine Abb. $g: B \to A$ gibt, so dass:

$$g \circ f = id_A \quad | \quad f \circ g = id_B$$

wobei $id_A : A \to A,\ a \mapsto a$

$id_B : B \to B,\ b \mapsto b$ die Identischen Abbildung

Bsp: 1) $A = B = \mathbb{R}_{\geq 0}$ $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $y = f(x) = x^2$, $g(y) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfkt.

2) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^x$ ist umkehrbar mit Umkehrfkt $g(x) = f^{-1}(x) = \ln(x)$

Ist f umkehrbar, so verwenden die Notation f^{-1}: für die Abb. g.

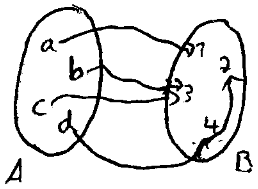
Def: $f: A \to B$ eine Abb. f heißt <u>injektiv</u>, wenn für $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ auch $f(a_1) \neq f(a_2)$

f heißt <u>surjektiv</u>, wenn für jeden Punkt $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$

f heißt bijektiv, wenn f injektiv & surjektiv ist.

Bem: $f: A \to B$ ist genau dann umkehrbar, wenn f bijektiv ist.

Bsp:



f ist weder injektiv noch surjektiv, weil $f(b) = f(c)$ obwohl $b \neq c$ und weil 4 nicht im Bild liegt.

$f: A \to B$ Abb.: Das Bild im f ist $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

<u>Def: Komposition von Abbildungen</u> 28.10.14

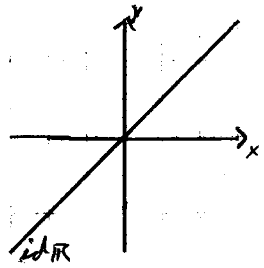
$f: A \to B$ & $g: B \to C$ Abbildungen, dann ist die Komposition $g \circ f: A \to C$ durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ definiert.

Weitere Notationen

$f: A \to B$ Abbildung, dann heißt $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset B$ das <u>Bild</u> von A unter f. (f surjektiv $\Leftrightarrow f(A) = B$) | $B_1 \subset B$ dann heißt $f^{-1}(B_1) := \{a \in A \mid f(a) \in B_1\} \subset A$ heißt Urbild von B_1. A beliebige Menge, dann bezeichnet $id_A: A \to A, a \mapsto a$ die Identische Abb. auf A.

28.10.14

<u>Bsp:</u> $id_{\mathbb{R}}$ ist die Fkt $y=x$



$f: A \to B$ heißt umkehrbar, wenn es eine Abbildung $g: B \to A$ gibt, so dass

$$g \circ f = id_A$$

und $f \circ g = id_B$ $\quad$ g heißt dann <u>Umkehrfkt</u> von f.

<u>Bsp:</u> $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto e^x$ hat $\ln: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, y \mapsto \ln y$ als Umkehrfkt.

<u>Bemerkung:</u> $f: A \to B$ hat ist umkehrbar, genau dann, wenn f <u>bijektiv</u> ist.

Beweis: Sei f Umkehrbar und g die Umkehrfkt.

Angenommen $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$$g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = id_A(x_1) = x_1, \qquad g(f(x_2)) = x_2$$

$\Rightarrow f$ ist injektiv

$y \in B$ $x = g(y)$ hat die Eigenschaft

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_B(y) = y$$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv

Sei f bijektiv und $y \in B$. Dann gilt das Urbild $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ da f surjektiv ist und enthält höchstens ein Element, da f injektiv.

Also: $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Wir definieren $g: B \to A$ durch $g(y) := x$

Notation: Die Umkehrabbildung wird häufig mit f^{-1} bezeichnet.

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x\} \;\&\; f^{-1}(y) = x$$

f^{-1} könnte auch noch $\frac{1}{f}$ (für f reelle Fkten) bezeichnen.

$\Rightarrow$ Aus dem Kontext ist klar, was gemeint ist

<u>Bsp:</u> Für Kompositionen

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(u,v,w) \mapsto u+v+w$ $\qquad \Rightarrow (g \circ f)(u,v,w) = (u+v+w)^2$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$

<u>Bsp:</u> $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x^2-1}{x} \qquad (f \circ g)(x) = \frac{\frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^2 - 1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

$f: \mathbb{R} \setminus \{1,-1\} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Einschränkungen von Abb.: $f: A \to B$ Abb. $A_1 \subset A$ Teilmenge

$f|_{A_1}: A_1 \to B_1; x \mapsto f(x)$ für $x \in A_1$

Warnung: Nur durch Einsetzen in Formeln erhält man nicht zwingend die richtige Def. einer

Komposition.

$$g: A \to B, \quad f: D \to C, \quad \text{mit } D \subset B$$

$A_1 = f^{-1}(D)$ und $g|_{A_1}$. Dann ist $f \circ (g|_{A_1})$ definiert.

Bsp: $A_1 \subset A$ dann ist die Inklusion $A_1 \hookrightarrow A$, $a \mapsto$ eine injektive Abbildung.

Bsp: $f: A \to B$ eine Abbildung, $f(B) = B_1$

$f_1: A \to B_1$, $f_1(a) := f(a)$ ist dann definiert und $f = i \circ f_1$ wobei $i: B_1 \hookrightarrow B$

die Inklusion ist.

Satz: Es seien $f: A \to B$, $g: B \to C$ und $h: C \to D$ Abbildungen, dann gilt:

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Kompositionen von Abbildungen ist assoziativ)

$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ Dies gilt für $x \in A$

$$\Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \square$$

Satz: Es sei $f: A \to B$ & $g: B \to C$ beides bijektive Abbildungen.

Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und die Umkehrabbildung $(g \circ f)^{-1}$ ist.

$$(g \circ f)^{-1} = \cancel{f \circ g} \leftarrow \text{falsch } C \neq A$$

$$= f^{-1} \circ g^{-1}, \quad C \xrightarrow{g^{-1}} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

$(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = id_A$

z.Z.: $id_A \overset{!}{=} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{id_B} \circ f = f^{-1} \circ f = id_A$ ok.

Zahlbereiche

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} :\Leftrightarrow ad = bc \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{4+4}{8} = \frac{8}{8} = 1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\mathbb{R} = \{$endliche oder unendliche Dezimalzahlen$\}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrational) $\quad$ Angenommen: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ teilerfremd

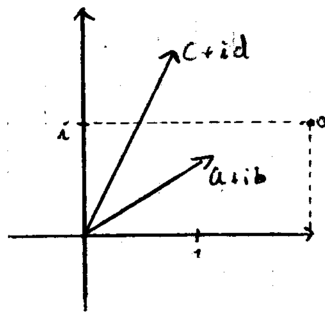
$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a \text{ ist gerade} \quad (a = 2a_1)$$

$$2b^2=(2a_1)^2=4a_1^2 \Rightarrow b^2=2a_1^2$$

$\Rightarrow$ b gerade ↯ zu a & b teilerfremd $\Rightarrow$ Widerspruch

Komplexe Zahlen

$x^2+1=0$ hat keine Lösung in der Menge der reellen Zahlen.



Sei i eine (imaginäre = gedachte Lösung)

$$i\in\mathbb{C}\supset\mathbb{R}$$

$$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}^2$$

Gaussche Zahlenebene

Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$.

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)(c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

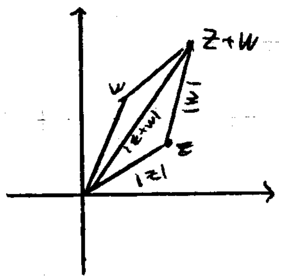
$$a+ib\neq 0 \Leftrightarrow (a,b)\neq(0,0)$$

Def: $z=x+iy$ komplexe Zahlen, $x,y\in\mathbb{R}$

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2} = \text{die Länge des Vektors}$$

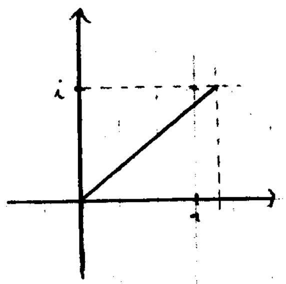
Satz: Rechenregeln für Beträge

$z=x+iy$, $w=u+iv\in\mathbb{C}$



Dann gilt:

1) $|z|\geq 0$ und $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
2) $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$
3) $|z+w|\leq|z|+|w|$ Δ-Ungleichung



Def: $z=x+iy$ Dann heißt $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$ heißen Realteil & Imaginärteil in z.

$\bar{z}=x-iy$ heißt die zu z konjugierte komplexe Zahl

Es gilt: $z\bar{z}=|z|^2$

In der Tat $(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2=|z|^2$

$z=x+iy\neq 0$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}\ \frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Komplexe Zahlen

31.10.14

$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2$

Auf $\mathbb{C}$ sind zwei Verknüpfungen erklärt

$+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$((a+ib, c+id)) \mapsto (a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d)$

$\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(a+ib, c+id) \mapsto (a+ib)(c+id) := (ac-bd)+i(bc+ad)$

Bezüglich dieser Verknüpfungen gelten Kommutativgesetze für die Addition & Multiplikation

$z+w = w+z, \ zw = wz \ \forall \ z,w \in \mathbb{C}$

Assoziativgesetze

$(z+w)+u = z+(w+u) \quad \forall \ z,w,u \in \mathbb{C}$

$(zw)\cdot u = z\cdot(w\cdot u)$

Distributivgesetze

$z\cdot(w+u) = z\cdot w + z\cdot u$

$(z+w)\cdot u = z\cdot u + w\cdot u$

Existenz einer Null $\quad 0 = 0+i0$

erfüllt $\ 0+z = z \quad \forall z$

Existenz des Negativen

$\forall \underset{\overset{\shortparallel}{a+ib}}{z} \in \mathbb{C} \ \exists \ -z = (-a)+i\cdot(-b)$ welches $-z+z = 0$

Existenz eines Einselements

$1 = 1+i0$ welches $1\cdot z = z \ \forall \in \mathbb{C}$ erfüllt

Existenz des Inversen

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \ \exists \ z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit $z^{-1}\cdot z = 1$

Dazu: $z = x+iy \neq 0, \ x^2+y^2 \neq 0,$

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}; \ (x+iy)\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-(iy)^2}{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \underline{1}$ ok!

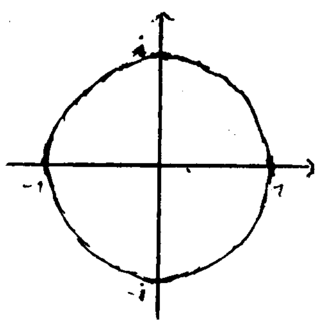
$\forall$ = "für alle", $\exists$ "(e)xistiert ein"

Wir definieren $z = x+iy$; $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\mathrm{Re}\, z := x, \ \mathrm{Im}\, z := y, \ \bar{z} = x-iy$

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ vermöge $x \mapsto x+i0 = x$

Gaußsche Zahlenebene

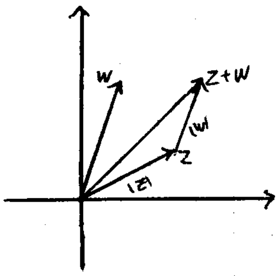


Einheitskreis $= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Rechenregeln für $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \bar{z}$ und $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ z \mapsto |z|$

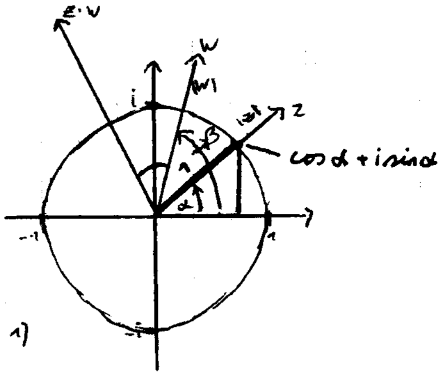
31.10.14

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
- $|zw| = |z| \cdot |w|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung



$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

insbesondere gilt auch $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$



$\cos\alpha = \frac{\underline{\text{Ankathete}}}{\underline{\text{Hypothenuse}}}$

$\sin\alpha = \frac{\underline{\text{Gegenkathete}}}{\underline{\text{Hypothenuse}}}$

Gradmaß	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

$\pi = 3{,}14159$

$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

$w = |w| \cdot (\cos\beta + i \sin\beta)$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \left((\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) + i \underbrace{(\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta)} \right)$$

$$|z| \cdot |w| \left[\cos(\alpha+\beta) \quad + \quad i \cdot \sin(\alpha+\beta) \right]$$

Wegen den <u>Additionstheoremen</u> für Sinus und Cosinus

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$

1) $\Rightarrow$ Bei der Multiplikation, multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Winkel

Also: die Abb.

$\mathbb{C} \to \mathbb{C} \; ; \; z \mapsto z \cdot w$

ist eine Drehstreckung, genauer für $w = |w|(\cos\beta + i \sin\beta)$ eine Streckung um den Faktor $|w|$ und eine Drehung um den Winkel β.

<u>Eigenschaften von sin & cos:</u>

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$

$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$

$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \end{array}\right\}$ Man sagt, sin & cos sind 2π-periodisch

<u>Spezielle Werte von</u>

α	sin	cos
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1

α	sin	cos
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

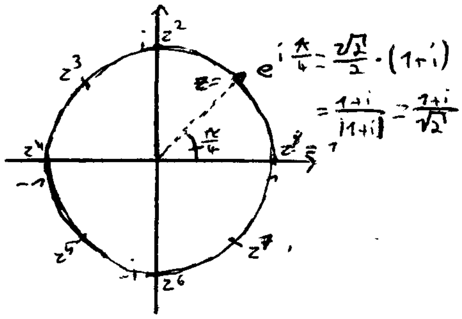
Man setzt:

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \sin\varphi \text{ für } \varphi \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

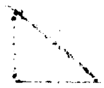
$$e^{i(\varphi+\psi)} \overset{\downarrow}{=} e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} \quad \forall\, \varphi, \psi \in \mathbb{R} \text{ im Bogenmaß}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$



$$|z^k| = |z|^k = 1$$

$$z^9 = z \;;\; k = 9$$



Summen und Produkte

Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

Dann definieren wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \& \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Bsp: $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15$

$$\sum_{k=1}^{100} k = 5050 \qquad \begin{array}{l} 1 + 2 + \dots + 100 \\ 100 + 99 + \dots + 1 \\ \hline 101 + \dots + 101 = 100 \cdot 101 = 10100 : 2 = \underline{\underline{5050}} \end{array}$$

$$\prod_{k=1}^{n} k = n! \qquad 0! = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \approx \frac{1}{3} n^2 \cdot n \quad \left(\text{genauer} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{9} \left[\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right]^k = 0$$

Rechenregeln für Summen & Produkte

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{Assoziativ, Kommutativ}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{m} b_l\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_k b_l \qquad \text{Distributiv}$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{l=1}^{n} b_l = \prod_{k=1}^{n} (a_k b_k)$$

Beliebte Fehler

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \neq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \quad \underline{\text{sondern:}} \quad = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} b_l\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k b_l \quad n^2 \text{ Terme!}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{3} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} k \cdot k \Rightarrow 1+4+9 = 14 \qquad (1+2+3)^2 = 36 \neq 3 \cdot 14 = 42$$

31.10.14

Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen

In $\mathbb{R}$ sind einige Zahlen positiv: $x > 0$

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

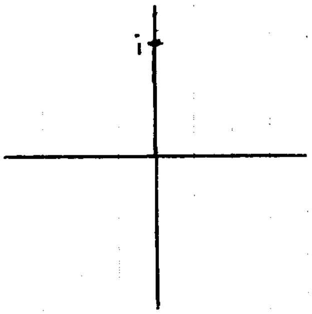
$$(*) \quad x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,\ y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$

$$\Rightarrow x \cdot y > 0$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\} \cup \underbrace{\{x \mid -x > 0\}}_{\mathbb{R}_{<0}}$$

Gibt es eine Zerlegung?

$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{>0} \cup \{0\} \cup \mathbb{C}_{<0}$? d. h. können $\mathbb{C}$ anordnen, sodass $(*)$ gilt?



Angenommen $i > 0$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\|}{-1}}{i^2} > 0 \quad \Rightarrow -1 + 1 = 0 > 0 \ ↯$$

Die Antwort ist nein! $\mathbb{C}$ läßt sich nicht ~~vernünftig~~ anordnen.