04.11.14

4. Umformungen von Gleichungen & Ungleichungen

A) Gleichung

$x^3-1=x-1$, wollen wir lösen

Gegeben, eine Gleichung $f=g$, wobei f,g aus Termen besteht.

1) $f=g \Leftrightarrow f+h=g+h$, wobei h ein weiterer Ausdruck ist.

(Beinhaltet Subtraktion, $-h$ ist auch eine Summe in Termen)

2) Multiplikation von beiden Seiten mit einem Ausdruck h, der nie Null ist.

$f=g \Leftrightarrow f\cdot h=g\cdot h$, bzw. Division durch einen Ausdruck, der nie Null ist.

$x^3-x=0 \Leftarrow x^2-1=0$

$D_1=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0\}$; für $x\in D_1$ gilt: $x^3-x=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$ auf D_1

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0$

$x^3-x=0 \Leftrightarrow x\in\{0,1,-1\}$

$\Rightarrow$ häufig Fallunterscheidung

$\overset{\shortparallel}{x(x-1)(x+1)}$

$x\in\mathbb{R}$

Bsp: $f=u_1^2+u_2^2$; $g=2u_1u_2$; $u_1,u_2\in\mathbb{R}$

$f=g \Leftrightarrow u_1^2+u_2^2=2u_1u_2$

$\Leftrightarrow u_1^2-2u_1u_2+u_2^2=0$

$\Leftrightarrow (u_1-u_2)^2=0$ $(\Leftrightarrow u_1-u_2=0$ oder $u_1-u_2=0)$

$\Leftrightarrow u_1-u_2=0$

$\Leftrightarrow u_1=u_2$

Keine Äquivalenzumformungen sind:

- Multiplikation / Division auf ein Ausdruck der Null werden kann
- Potenzieren beider Seiten $x=-5 \not\Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=5$
- Wurzelziehen auf beiden Seiten

B) Ungleichungen

f,g Terme : $f>g$ / $f<g$

- Addition zu beiden Seiten von einem Term.

$f<g \Leftrightarrow f+h<g+h$

- Multiplikation mit einem Ausdruck h, der stets >0 ist: $h>0$, $f<g \Leftrightarrow h>0$, $hf<hg$

- Multiplikation von beiden Seiten mit $h<0$

$$h<0,\ f<g \Leftrightarrow h<0,\ h\cdot f > h\cdot g$$

Bsp $x<y \Leftrightarrow -x>-y$

Ferner: Gleichheit ist transitiv

$$f=g \text{ und } g=h \Rightarrow f=h$$

Ungleichung in die gleiche Richtung ist transitiv

$$f<g \ \&\ g<h \Rightarrow f<h$$

Bemerkung: Aus $a<b$ und $c<b$ kommen keine Ungleichung $a<c$; $a>c$ folgen.

genauso: $a\neq b,\ b\neq c \not\Rightarrow a\neq c$

Bsp: $2\neq 3,\ 3\neq 2 \Rightarrow 2\neq 2$

Bsp: Quadratische Gleichung

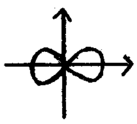
$$x^2+px+q=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4} \Leftrightarrow x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}} \Leftrightarrow x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Bsp: $y^2-x^2+x^4=f(x,y)$

$V_0(f)=\{(x,y) \mid f(x,y)=0\}$

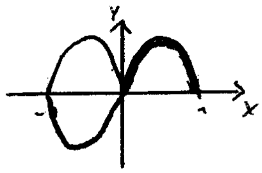


$y^2-x^2+x^4=0$

$\sqrt{x^2(1-x^2)}$

$\Leftrightarrow y^2=x^2-x^4 \Leftarrow y=\sqrt{x^2-x^4}=x\sqrt{1-x^2}$

$D=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\leq x\leq 1\}$



$y=\sqrt{x^2-x^4}$

$y=x\cdot\sqrt{1-x^2}$; $x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}$
gilt nur wenn $x>0$

5. Funktionen & ihre Eigenschaften I

Def: $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, dann heißt:

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ abgeschlossenes Intervall (mit den Randpunkten a,b)

$]a,b[=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ offenes Intervall

$[a,b[=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$

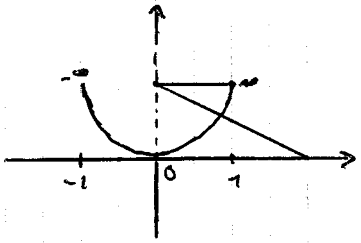
$]a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$ halboffenes Intervall

Mit Symbolen $+\infty, -\infty$ haben wir:

$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}$ $\quad [a,\infty[$

$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq b\}$ $\quad]\infty,b[$

04.11.14 Ein Intervall ist eine Teilmenge D, die einige der obrigen Formen hat.



$]-1,1[\to \mathbb{R}^2$

$x \mapsto x^2$

<u>Def:</u> Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach <u>oben beschränkt</u> wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x \leq C$ für alle $x \in M$.

<u>Mit anderen Worten:</u> $M \subset]-\infty, C]$ 1)

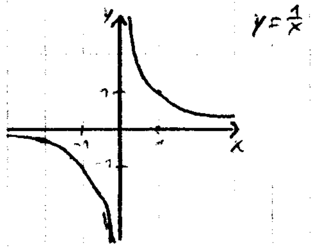
M heißt nach unten beschränkt, wenn M nach <u>unten und nach oben beschränkt</u> ist

d.h. $\exists\, c, C \in \mathbb{R}$, sodass $M \subset [c, C]$

<u>Beispiele:</u> $\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist nach unten beschränkt, durch $c = 0$.

$\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ ist beschränkt durch $C = 1$ nach oben und $c = 0$ nach unten.

$\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ ist nicht beschränkt.



Eine wichtige Eigenschaft die $\mathbb{R}$ (aber nicht $\mathbb{Q}$) hat.

<u>Satz:</u> Jede nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke. Bezeichnung für diese ist: <u>$\sup M$</u>, das Supremum von M

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ $\Rightarrow$ $\sup M = \sqrt{2}$

$\sup M = ?$

$\sup M$ ist eine obere Schranke von M und wenn C eine weitere obere Schranke von M ist, dann gilt:

$\sup M \leq C$

<u>Idee:</u> $x < \sup M$. Dann existiert $m \in M$, sodass $x < m$.

(andere) <u>Idee:</u> C obere Schranke: $m \in M \Rightarrow m \leq C$

<u>Satz + Def.:</u> Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $M \neq \emptyset$. Ist M nach unten beschränkt, dann existiert in $\mathbb{R}$ eine größere untere Schranke von M. Diese heißt Infimum von M : <u>$\inf M$</u>

<u>Bsp:</u> $\inf\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = 0$; $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} = \inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} = 0$

---

1)
M heißt nach <u>unten beschränkt</u>, wenn $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$c \leq x \quad \forall x \in M$ bzw $M \subset [c, \infty[$

Bem: Sind c_1 und c_2 beide Suprema von M

$\Rightarrow c_1 \le c_2$ und $c_2 \le c_1 \Rightarrow c_1 = c_2$

Def: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

a) f heißt monoton steigend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

— " — streng monoton — " — $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

b) f heißt monoton fallend, wenn $x_1, x_2 \in D \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

— " — streng monoton — " — $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

c) $f: D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn die

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}$$

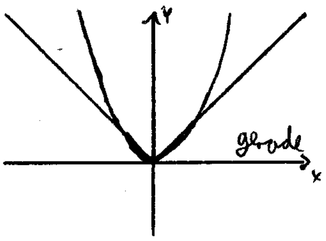
beschränkt ist, d. h. $\exists\, c, C \in \mathbb{R}$, sodass $c \le f(x) \le C$ für alle $x \in D$.

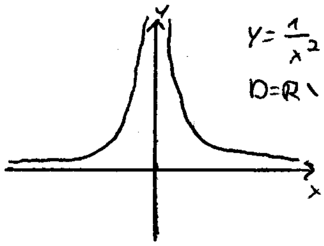
d) Die Menge D heißt symmetrisch (um $0 \in \mathbb{R}$), wenn $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem symmetrischen Defbereich.

heißt gerade Funktion, wenn $f(-x) = f(x)$

ungerade Funktion, wenn $f(-x) = -f(x)$ $\quad \forall x \in D$





$y = \frac{1}{x^2}$

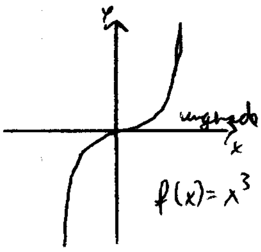
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Satz: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion, $B = f(D)$, dann ist die Abb. $f: D \to B$ umkehrbar, $g: B \to D$, mit $f \circ g = id_B$

$g \circ f = id_D$

Bsp: $y = x^2$

$f(x) = |x|$



$f(x) = x^3$