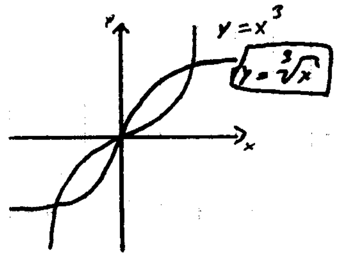
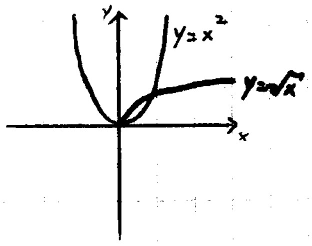
11.11.14 Bsp: $f(x)=x^3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend

$f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$





Bsp: $y=x^2$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist nicht monoton

$f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}: \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ $x=\sqrt[2]{y}$, $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}$

Def: Eine ganzrationale oder Polynomfunktion

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ist eine Funktion die durch eine Formel der Art:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^k + \dots + a_1 x + a_0$$

gegeben ist. Dabei sind $a_0,\dots,a_n \in\mathbb{R}$ Konstanten, die sogenannten Koeffizienten.

Gilt $a_n\neq 0$, dann heißt $n=\mathrm{dg}\, f$ der Grad von f.

Polynome kann man addieren & multiplizieren.

$$(x^3+x^2+x+1)+(x^2+2x+3)=x^3+2x^2+3x+4$$

$$(x^3+x^2+x+1)\cdot(x^2+2x+3)=x^5+(1+2)x^4+(3+2+1)x^3+(1+2+3)x^2+(2+3)x+1\cdot 3=$$

$$=x^5+3x^4+6x^3+6x^2+5x+3$$

Allgemein

$f(x)=a_n x^n+\dots+a_1x+a_0$

$g(x)=b_m x^m+\dots+b_1x+b_0$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \text{, wobei } c_k=\sum_{\substack{l,j \\ \text{mit} \\ l+j=k \\ 0\leq l\leq n,\, 0\leq j\leq m}} a_l\cdot b_j$$

Insbesondere gilt:

$\mathrm{dg}(f(x)g(x))=\mathrm{dg}\, f+\mathrm{dg}\, g$ $\qquad c_{n+m}=\underset{\neq 0}{a_n}\cdot \underset{\neq 0}{b_m}\neq 0$

$\mathrm{dg}(f(x)+g(x))=\max(\mathrm{dg}\, f; \mathrm{dg}\, g)$

$(x^2+1)+(-x^2+1)=2$

$f = a_n x^n + \ldots + a_0$

$g = b_m x^m + \ldots + b_0$

$d_Y(f+g) \leq \max(d_Y f, d_Y g)$ und $<$ tritt genau dann auf, wenn $d_Y f = d_Y g$ ($\Rightarrow n = m$)

und $a_n = -b_m$ gilt. (a_n heißt Leitkoeffizient)

Mit $\mathbb{R}[x]$ bezeichnen wir die Menge der Polynome

Satz: (Division mit Rest für Polynome)

Seid $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und $g \neq 0$, d.h. nicht das Nullpolynom, dann existieren Polynome $q, r \in \mathbb{R}[x]$

$\boxed{\left(d_Y \underset{\text{0-Polynom}}{\underset{\uparrow}{0}} := -\infty \right)}$ mit: 1) $f = qg + r$

2) $d_Y r < d_Y g$

<u>Beweis</u>: (per Algorithmus) $\rightarrow$ schriftl. Division

$f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $g = x^2 + 1$

$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1) = x^2 + x$ Rest $\underline{\underline{1}}$

$\underline{x^4 + x^2}$

$x^3 + x + 1$

$\underline{x^3 + x}$

1

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Man kann auch Polynome mit komplexen Koeffizienten betrachten.

$f = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_k \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}[x]$ heißt Menge der komplexen Polynome.

<u>Folgerung 1</u>: $f \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom und $a \in \mathbb{R}$, a ist genau dann eine Nullstelle in f (d.h. $f(a) = 0$)

wenn $f(x) = (x-a)g(x)$

$f(x) = g(x)(x-a) + c$, wobei $r = c$ eine Konstante. Polynom ist wegen $d_Y r < d_Y(x-a) = 1$

a Einsetzen gilt:

$$f(a) = g(a) \cdot 0 + c$$

$\Rightarrow c = f(a) \Rightarrow f(x) = g(x)(x-a) + f(a)$

Also $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-a)$

<u>Folgerung 2</u>: Ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ im Grad $\deg f = n$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$

<u>Bsp</u>: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ hat Nullstelle 1

$(x^4 - 2x^2 + 1) : (x-1) = \underbrace{x^3 + x^2 - x - 1}_{g(x)}$

$\underline{x^4 - x^3}$

$x^3 - 2x^2 + 1$

$\underline{x^3 - x^2}$

$-x^2 + 1$

$\underline{-x^2 + x}$

$-x + 1$

$\underline{-x + 1}$

0

$g(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$

$f(x) = (x-1)^2 \underbrace{(x^2 + 1)}$

$\rightarrow$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$

11.11.14

Def: Sei $f \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle, dann läßt sich

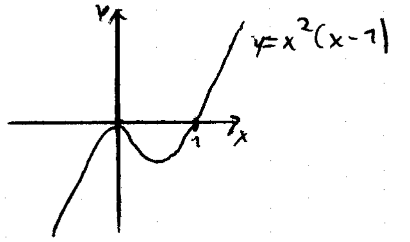
$f(x) = (x-a)^m \cdot g(x)$ (wobei $g(a) \neq 0$

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

Man nennt m = Vielfache der Nullen a von f

Bsp: $f(x) = x^2(x-1)$ hat 2 Nullstellen $\{0, 1\}$

0 mit Vielfachheit 2 und 1 mit Vielfachheit 1 (einfache Nullstelle)



Division mit Rest und Folgerung 1 gilt auch für $\mathbb{C}[x]$

Satz: (Gauss, Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ m grad $n \geq 1$ hat mit Vielfachheit gezählt genau n Nullstellen

Insbesondere wenigstens eine Nullstelle.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2 = ((x-1)(x+1))^2 = (x^2-1)^2$

$f(x) = x^2 \underbrace{(x^2+1)}_{\text{keine Nullstelle in } \mathbb{R}\text{, aber in } \mathbb{C}\ (\pm i)} = x^2(x-i)(x+i)$

Folgerung: Für $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f \geq 1$, hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung $x = z \in \mathbb{C}$

$\Big(\left(y = x^2 + 1 + \frac{x+1}{x^2-1} \right) = \frac{x^4+x}{x^2-4}$ NS = $\{0, -1\}$

Pole $\{\pm 2\}$

$x^4 + x = x(x+1)(x^2-$ $\Big)$!