

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 4}$$

14.11.14

Polstellen: $x^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow x_{\text{pol}} \in \{\pm 2\}$$

Nullstellen

$$x_{\text{NS}} \in \{1, -1\}$$

$$(x^4 - 1) : (x - 1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$-(x^4 - x^3)$$

$$\frac{x^3 - 1}{-(x^3 - x^2)}$$

$$\frac{x^2 - 1}{-(x^2 - x)}$$

$$\frac{x - 1}{-(x - 1)}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1) = x^2 + 1$$

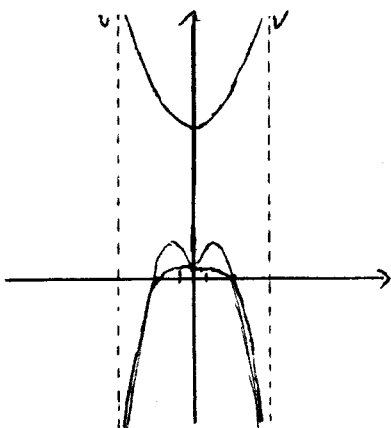
$$-(x^3 + x^2)$$

$$\frac{x + 1}{-(x + 1)}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

hat keine reelle NS



Asymptotisches Verhalten (für $x \rightarrow \pm \infty$)

$$(x^4 - 1) : (x^2 - 4) = x^2 + 4 + \frac{15}{x^2 - 4}$$

$$-(x^4 - 4x^2)$$

$$\frac{4x^2 - 1}{-(4x^2 - 16)}$$

$$\frac{15}{15}$$

für $x \rightarrow \pm \infty$

Also der Graph von $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 4}$ nähert sich für großes $|x|$ dem Graphen von $y = x^2 + 4$ an.

$$f(0) = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4)4x^3 - 2x(x^4 - 1)}{(x^2 - 4)^2}$$

Extrema: nur bei Nullstellen des Zählers (der Ableitung)

$$4x^5 - 16x^3 - 2x^5 + 2x = 2x^5 - 16x^3 + 2x = x(2x^4 - 16x^2 + 2)$$

$$= 2x(x^4 - 8x^2 + 1)$$

$$x^2 = z, \quad z^2 - 8z + 1 = 0, \quad z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 1} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x_{\text{extrema}} = \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{15}}$$

$$\approx 3,81$$

$$\approx \pm \sqrt{0,13}$$

$$\approx \pm 0,36$$

→ falsch

$$\approx \pm \sqrt{7,87}$$

$$\approx \pm 2,8$$

Bem. $f \in \mathbb{R}[x]$ reelles Polynom, $\beta = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle,

dann ist auch $\bar{\beta} = a - ib \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle

Beweis: $f(\beta) = 0 \Rightarrow 0 = \bar{0} = \overline{f(\beta)} = f(\bar{\beta})$

Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra

Sei $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein reelles Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient $a_n \neq 0$. Dann faktorisiert f als reelles Polynom in ein Produkt von linearen und quadratischen Faktoren.

Genauer: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ die reellen Nullstellen und $\beta_1, \bar{\beta}_1, \dots, \beta_r, \bar{\beta}_r$ die Paare in komplexen Nullstellen, dann gilt:

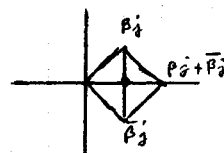
14.11.14

Dann gilt:

$$f(x) = a_n (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r} \cdot q_1^{n_1} \dots q_s^{n_s}$$

wobei:

$$q_j(x) = (x - \beta_j)(x - \bar{\beta}_j) = x^2 - (\beta_j + \bar{\beta}_j)x + \beta_j \bar{\beta}_j \\ = x^2 - 2 \operatorname{Re} \beta_j x + |\beta_j|^2 \in \mathbb{R}[x]$$



und $m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gewisse Vielfachheiten

$$n = \sum_{j=1}^r m_j + 2 \sum_{j=1}^s n_j \text{ gilt.}$$

Def: Funktion der Art

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}; p, q \in \mathbb{R}[x] \text{ nennt rationale Funktionen}$$

Die nächste Klasse an Funktionen die wir betrachten sind Exponentialfunktionen und Logarithmen.

Def: Sei $a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

Dann heißt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} (= \prod_{j=1}^n a) \text{ die } n\text{-te Potenz von } a$$

$$a^0 = 1; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, (\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Dann gilt:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z}$$

Inbesondere $a^0 = a^n \cdot a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

Ferner: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Für $a > 0$ setzt man ebenfalls

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \quad \text{da } (a^{\frac{1}{n}})^n = (\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a^n}) = a \\ a = a^1 = a^{\frac{1}{n} \cdot n}$$

Weiter:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

Damit a^x für rationale Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}_0$ erklärt.

Schließlich wollen a^x erklären für $x \in \mathbb{R}$ beliebige Zahl und $a > 0$

$$a^x = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{q_k} \text{ wobei } (q_k) \text{ eine Folge von rationalen Zahlen ist, die gegen } x \text{ konvergiert}$$

Satz + Def: Sei $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

Weiter ist $a > 1$

Dann ist die Funktion

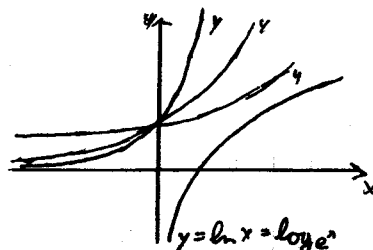
$$x \mapsto a^x$$

streng monoton wachsend mit Wertebereich $]0, \infty[$. Ist $0 < a < 1$ dann ist $x \mapsto a^x$ streng monoton

fallend mit Wertebereich $]0, \infty[$

In beiden Fällen hat also $x \mapsto a^x$ eine Umkehrfunktion

$$\log_a: \underset{\text{Wertebereich}}{\mathbb{R}_{>0}} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_a x$$



$y = e^x$, e = Eulersche Zahl.

$y = 2^x$ $y = 10^x$

Satz: Rechenregeln für den Logarithmus

$$\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$$

$$\log_a(y^r) = r \log_a y$$

Für Logarithmen zur verschiedenen Basen $a, b > 0$ gilt:

$$\log_b(y) = \frac{1}{\log_a(b)} \log_a(y)$$

Bsp: $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 1000 = 3$ usw.

$$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -\log_{10} 100 = -2$$

$$\log_{100}(10^4) = 2$$

$$\frac{1}{\log_{10}(100)} \log_{10}(10^4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2, \text{ od!}$$

In der Praxis sind die Logarithmen zur Basis 10, e und 2 am wichtigsten.

Schreibweise

$$\log_{10} y = \lg y, \log_e y = \ln y \quad (\text{natürlicher Logarithmus})$$

$f(x) = x^x : f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ diffbar.