18.11.14 **Satz**: Die Fkten. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. $\sin(x)$ ist eine ungerade Funktion mit Nullstellen der Punkte der Menge

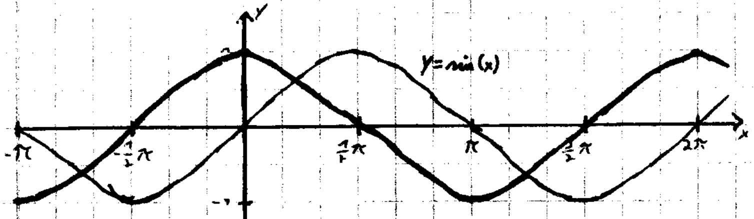
$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

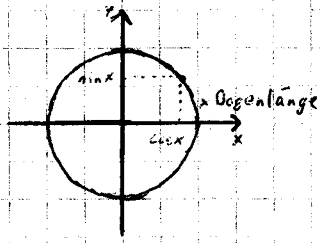
$\cos(x)$ ist eine gerade Funktion mit Nullstellen in

$$\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$\sin(x)$ ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend.

$\cos(x)$ ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend.





$\cos(0) = 1$; $\sin(0) = 0$

Sinus und Cosinus sind periodisch mit Periode 2π

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ $\qquad$ $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Def: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definieren wir:

$$\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$$

und für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

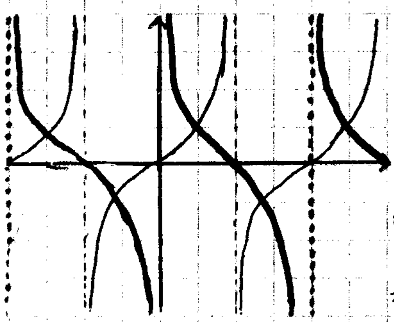
Bemerkung: $\tan(x)$ ist periodisch mit Periode π

1) Additionsthm.

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{1)}{=} \frac{\sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi)}{\cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan(x)$$ (Analog f. $\cot(x)$)

Satz: $\tan(x)$ ist in dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend.

$\cot(x)$ ist in dem Intervall $]0, \pi[$ streng monoton fallend.



$\blacksquare = \cot(x)$

$= \tan(x)$

Beweis: Die Monotonie des Tangens:

$]-\frac{\pi}{2}, 0[\ni x_1, x_2$ mit $x_1 < x_2$

$-1 < \sin x_1 < \sin x_2 < 0$

$0 < \cos x_1 < \cos x_2 < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\cos(x_2)} < \frac{1}{\cos x_1}$

$0 > \frac{\sin x_1}{\cos x_2} > \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \tan x_1$, da $\frac{1}{\cos x_2} > 0$ & $\sin x_2 > \sin x_1$

$\Rightarrow 0 > \tan(x_2) = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} > \frac{\sin x_1}{\cos x_2} > \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \tan(x_1)$

$\Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2 < 0$

Für $x_1, x_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ mit $x_1 < x_2$ argumentiert man ähnlich. $\overset{\tan 0}{\overset{\shortparallel}{0}} < \tan x_1 < \tan x_2$ $\square$

Def: Eine Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hat Periode p falls:

$$f(x+p)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Für $D\subset\mathbb{R}$ eine Definitionsbereich mit $x\in D \Leftrightarrow x+p\in D$

heißt $f:D\to\mathbb{R}$ periodisch mit Periode p, falls $f(x+p)=f(x)\ \forall x\in D$

Bsp:

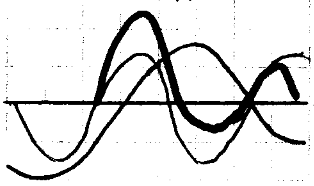
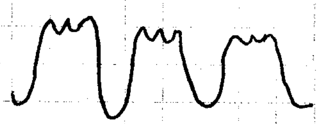
Für $n\in\mathbb{N}$ sind Funktionen $\sin(nx)$; $\cos(nx)$ alle periodisch mit Periode 2π

$\sin(2x)$ hat Periode π.

Eine Funktion der Gestalt

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)\qquad a_k, b_k\in\mathbb{R}\ (\text{Koeffizienten})$$

heißt Fourierpolynom mit Fourierkoeffizienten a_k, b_k

$\sin(x)+\sin(2x)$  allg: 

Bem: Die Funktion

$t\mapsto\sin(\omega t)$ hat Periode $p=\frac{2\pi}{\omega}$

Setzt man $v=\frac{2\pi}{\omega}$ und t die Zeit in Sekunden skaliert, so haben wir $\frac{1}{v}$

Schwingungen in einer Sekunden. v heißt auch Frequenz.

Satz + Def: Sinus ist auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ umkehrbar mit Wertebereich $[-1,1]$. Die

Umkehrfunktion $\arcsin: [-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\subset\mathbb{R}$ heißt arcussinus.

Tan: $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ \to\mathbb{R}$ ist umkehrbar mit Wertebereich $\mathbb{R}$

Die Umkehrfkt $\arctan:\mathbb{R}\to\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ \subset\mathbb{R}$ heißt arcustangens.

6. Grenzwerte und Differenzierbarkeit

Wir betrachten zunächst unendliche Folgen

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

von reellen Zahlen Schreibweise $(a_n)=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

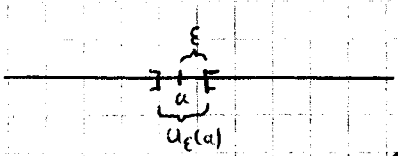
Bsp: 1) $(a_n)=(\frac{1}{n})=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)$

2) $(a_n)=(n)=(1,2,3,4,\dots)$

3) $(a_n)=\left(\sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{2})^j\right)\quad a_1=1,\ a_2=1+\frac{1}{2},\ a_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\dots$

18.11.14 **Def:** Für $\varepsilon>0$ und $a\in\mathbb{R}$ heißt $U_\varepsilon(a)=\{x\in\mathbb{R} \mid |x-a|<\varepsilon\}=]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$

eine ε-Umgebung von a



Bsp: $U_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})=]\frac{1}{4},\frac{3}{4}[$

Def: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, $a\in\mathbb{R}$. Die Folge (a_n) heißt konvergent gegen a

wenn für $\varepsilon>0$ alle bis auf endlich viele a_n in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen.

Für alle $\varepsilon>0$ existiert ein $N=N(\varepsilon)$, so dass $a_n\in U_\varepsilon(a)$ für alle $n\geq N$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

a nennt man auch Grenzwert der Folge (a_n) oder Limes.

Bsp: $(a_n)=(\frac{1}{n})$. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Sei $\varepsilon>0$, dann existiert ein N, so dass $N>\frac{1}{\varepsilon}>0 \Rightarrow \frac{1}{N}<\varepsilon$

Für $n\geq N$ gilt dann:

$|a_n-0|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$. Ab N liegen also alle Folgeglieder in $U_\varepsilon(0)$

Bsp: $\varepsilon=\frac{1}{2}$ dann reicht $N=3$ in diesem Bsp.

$\varepsilon=\frac{1}{10}$ —"— $N=11$

$\varepsilon=\frac{1}{1000}$ —"— $N=1001$

Bsp: $(a_n)=((-1)^n)$ Diese Folge konvergiert nicht, da für a beliebig in $\mathbb{R}$

und $\varepsilon=\frac{1}{2}$, nur eine der Punkte ±1 in $U_{\frac{1}{2}}(a)$ liegen kann, also stets

unendlich viele außerhalb der Umgebung liegen.

Bsp: $q\in\mathbb{R}$, $q\neq1$

$a_n=\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \qquad \left(\sum\limits_{k=0}^{n} q^k\right)(1-q)=\sum\limits_{k=0}^{n} q^k-\sum\limits_{k=0}^{n} q^{k+1} = 1+\sum\limits_{k=1}^{n} q^k-\sum\limits_{l=1}^{n} q^l - q^{n+1}$ $(k=l+1)$

$= 1-q$

$0<q<1 \qquad \lim \frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q} \qquad q\geq1$ haben wir keine Konvergenz

$a>0 \qquad x\in\mathbb{R}$

$a^x=\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$ $\quad q_n\in\mathbb{Q}$ eine Folge in rationalen Zahlen mit $\lim q_n=x$

Man kann zeigen, dass (a^{q_n}) tatsächlich konvergiert, und dass für alle Folgen (q_n)

aus $\mathbb{Q}$ mit $\lim q_n=x$ der gleiche Grenzwert rauskommt.

Satz: a) Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b. Dann sind

auch die Folgen (a_n+b_n), (a_nb_n) konvergent mit Grenzwert

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=a\cdot b$

b) Gilt außerdem $a_n \leq b_n$, so folgt $a \leq b$

⌈**Warnung:** $a_n < b_n \ \forall n \not\Rightarrow a < b$

Bsp: $(a_n) = (0)$, $(b_n) = (\frac{1}{n})$ $\lim \frac{1}{n} = 0 = \lim (0) = 0$ ⌋

Satz: a) Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben.

b) Eine Folge (a_n) von reellen Zahlen konvergiert genau dann, wenn für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$