

(a_n) eine Folge reeller Zahlen! $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Mit anderen Worten: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in der ε -Umgebung

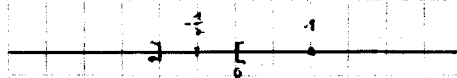
$$U_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

Def: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge

1) $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührungspunkt der Menge D , wenn es eine Folge (a_n) mit $a_n \in D \setminus \{a\}$

$$\text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

$$D =]-1, 0[\cup \{1\}$$



Menge B der Berührungspunkte

von D ist:

$$1 \notin B = [-1, 0]$$

Randpunkte im Intervall kommen dazu, isolierte Punkte fallen weg.

2) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein Berührungspunkt von D .

$$\text{Man sagt: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \in \mathbb{R}$$

wenn für jede Folge (a_n) aus $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

die Folge $(f(a_n))$ Grenzwert c hat.

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = c$$

Beispiele:

1) 1 ist Berührungspunkt von $[0, 1[= D$

2) Für $f(x) = x$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

3.) Für $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{1\}}_D \rightarrow \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$; da $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ für $x \neq 1$

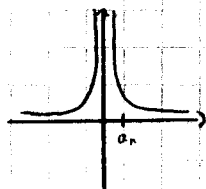
4.) Für $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5) Für $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ existiert

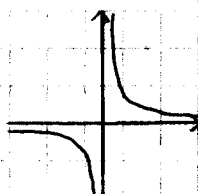
existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ nicht,

nicht

da:



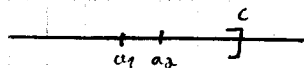
da:



Def: (Konvergenz gegen ∞ oder bestimmte Divergenz)

1) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

Wir sagen (a_n) konvergiert gegen $+\infty$



(Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$), wenn für

jedes $c > 0$ ein n_0 existiert, so dass $a_n > c \quad \forall n \geq n_0$, also für jedes c liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in dem Intervall $]c, \infty[$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wenn $\forall c > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder die Ungleichung $a_n < -c$ erfüllen.

3) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, a ein Berührungspunkt von D

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty)$$

Wenn für jede Folge (a_n) in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ die Folge $f(a_n)$ gegen $+\infty$ ($-\infty$) bestimmt divergiert.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

4) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Fkt., $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt in $D \cap]a, \infty[$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} c \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \text{falls für jede Folge } (a_n) \text{ aus } D \cap]a, \infty[$$

gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \begin{cases} c \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Analog definiert man

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} c \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \text{im Fall, dass } a \text{ ein Berührungspunkt von } D \cap]-\infty, a[\text{ ist.}$$

$$\text{Bsp: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

5) Sei D ein nach oben unbeschränkter Definitionsbereich

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} c \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}, \quad \text{falls für jede Folge } (a_n) \text{ aus } D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

ist auch: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \begin{cases} c \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$ schließlich $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ definiert.

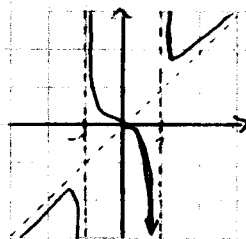
für $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit D nach unten unbeschränkt.

Beispiele:

25.11.14

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}, f: D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$



Es gilt:

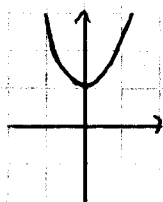
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\frac{x^4}{x^2+1} = \left(x^2+1 \right) + \frac{1}{x^2+1}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2+1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$

4) Schließlich

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ existiert nicht, da $\sin$ zwischen $+1$ & -1 oszilliert.

$$y = \sin \frac{1}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

5) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases})$

Def: Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt.

f heißt stetig in x_0 wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

f heißt stetig auf I , wenn f stetig in allen Punkten x_0 von I ist.

Def: Sei I ein Intervall $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt. f heißt in x_0 diffbar

wenn der folgende Grenzwert existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$

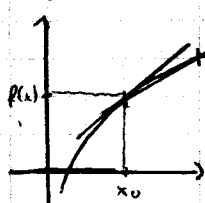
$f'(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt x_0 .

$$\left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = 1 \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \left(\sin \frac{1}{x} \right)' \quad (\text{Produktregel})$$

$$= \sin \frac{1}{x} + x \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right) \quad (\text{Kettenregel/Quotientenregel})$$

$$= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \quad \rightarrow \text{hat beschränkte Ableitung nahe 0.}$$

Geometrische Interpretation der Ableitung



$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0)); (x_1, f(x_1))$

Existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ so können inf $f'(x_0)$ als Steigung der Tangente an den Graphen durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ interpretieren

Mathematische Interpretation

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + g(x)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(x)}{x - x_0} \right| = 0$$

Also: $l(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ ist gute lineare Approximation

Physikalische Interpretation

$y = f(t)$; t , Zeit, $f(t)$. Die Koordinate eines Punktes, der sich bewegt.

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ Durchschnittsgeschwindigkeit.}$$

$f'(t_0)$ ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt Masse eines Stoffes während einer Reaktion, $f'(t)$ momentane Änderungsrate.

Satz: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in I$. Dann gilt:

a) f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ ist stetig in x_0

b) f, g diffbar (stetig) in x_0 , dann sind auch $f+g, f \cdot g$ diffbar (stetig) in x_0 und

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \text{ Produktregel}$$

Ist $g(x_0) \neq 0$ dann auch $\frac{f}{g}$ in x_0 diffbar (stetig)

und:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ Quotientenregel}$$

Satz: a) Polynome (ganzzahlige Potenzen) sind auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar.

b) Rationale Funktionen $\frac{f(x)}{g(x)}$ sind auf dem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ diffbar

c) Potenzfunktion $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sind diffbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\frac{d}{dx}(x^r) = (x^r)' = r x^{r-1}$$

d) Exponentialfkt

 $f(x) = a^x$, sind diffbar

mit $\frac{d}{dx}(e^x) = (e^x)' = e^x$

und

$(a^x = e^{(\ln a)x}) \quad (a^x)' = e^{(\ln a)x} = \ln a \cdot e^{(\ln a)x} = a^x \ln(a)$

e)

 $\log_a x$ ist auf $\mathbb{R}_{>0}$ diffbar $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und

f)

 $\sin, \cos$ sind auf $\mathbb{R}$ diffbar mit $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$