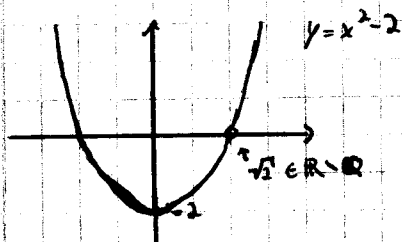
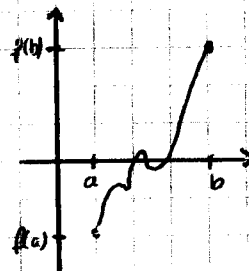


Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ & $f(b)$ an, d.h. $\exists \xi \in [a, b]$ $\uparrow$ $f(\xi)$

$f(a)$ & $f(b)$ an, d.h. $\exists \gamma \in [a, b]$
mit $f(\gamma) = z$. Wichtigster Spezialfall:

$f(a) < 0, f(b) > 0$, dann existiert eine Nullstelle $\eta \in [a, b]$ von f .



$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

Satz: (Vollständigkeit der reellen Zahlen)

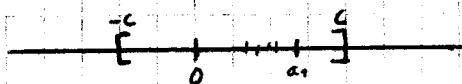
Sei (a_n) eine monotone, beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann hat die Folge einen Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Zur Erinnerung: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1} \forall n$
 " " " " fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1} \forall n$

und monoton wenn sie monoton fallend oder monoton steigend ist.

Eine Folge heißt beschränkt, wenn eine $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



Plausibilitätsbeweis für die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei (a_n) eine monoton fallende Folge positiver, reeller Zahlen.

Wir betrachten eine obere Schranke $C \in \mathbb{N}$

Das Intervall $[0, c] = \bigcup_{k=1}^{c-1} [k, k+1]$. Da die Folge monoton fallend ist, gilt es,

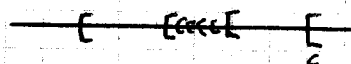
genau ein k , so dass alle bis auf endlich viele Folgenglieder im Intervall $[k, k+1[$

liegen. k gibt den ganzen Anteil des gesuchten Grenzwerts a .

Als nächstes zerlegen wir das Intervall

$$[h, h+1] \supseteq [h, h+0.1] \cup [h+0.1, h+0.2] \cup \dots \cup [h+0.9, h+1]$$

mit gleichem Argument, gibt es genau ein $b_1 \in \{0, \dots, 9\}$, so dass alle bis auf endlich viele a_n in dem Intervall $[k + b_1 \cdot 10^{-1}, k + (b_1 + 1) \cdot 10^{-1}]$ liegen.



b_1 gibt es, um die erste Nachkommastelle von a . Weiteres umklappen gilt uns die Folge $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \dots b_i \in \{0, \dots, 9\}$ sämtliche Nachkommastellen.

Also: $a = k + 0, b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots$

□

Beweis des Zwischenwertsatzes

Ohne Einschränkung sei $c=0$ und $f(a) < 0, f(b) > 0$; eventuell geht zu $\pm(f-c)$ über.

Wir betrachten zwei rekursiv definierte Folgen $(a_n), (b_n)$ mit

(a_n) ist monoton steigend, (b_n) monoton fallend $a_n \leq b_n \quad \forall n$

und $b_n - a_n = \sum_{i=1}^n (b - a)$, $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0$.

Wir setzen $a_0 = a, b_0 = b$

Sind a_n, b_n schon konstruiert, so betrachten wir

$$\frac{a_n + b_n}{2} \text{ und } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

Wir setzen

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n, & \text{falls } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ sowie } \quad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{falls } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0 \\ b_n, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Intervallhalbierungsalgorithmus)

Dann (a_n) monoton steigend, (b_n) monoton fallend und durch a bzw b von unten bzw oben beschränkt.

Vollständigkeit von $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} (b - a) = 0$

gilt $\xi = \xi'$. Da f stetig ist gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$

Wegen $f(a_n) \leq 0 \quad \forall n$ gilt $f(\xi) \leq 0$, wegen $f(b_n) \geq 0 \quad \forall n$ gilt $f(\xi) \geq 0$

Also $f(\xi) = 0$ □

Satz: (Existenz von Maximum und Minimum)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

Dann existieren $x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]$ so dass

$$f(x_{\max}) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \& \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Man sagt, das Maximum und Minimum wird angenommen

02.12.14

Bemerkung: Die Aussage ist falsch für offene Intervalle (oder unbeschränkte)

$$]0,1[, f(x) = \frac{1}{x}$$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $I \subset D$ ein Intervall (abg. beschr. Intervall)

Dann $J = f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (abg. beschr. Intervall)

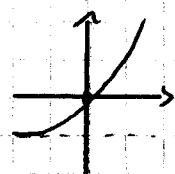
Beweis: $I = [a, b] \subset D$ abgeschlossen $x_{\max}, x_{\min}$ Maximum und Minimum in $f([a, b])$

Dann gilt: $f(I) \subset [f(x_{\min}), f(x_{\max})] = J$

da $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in [a, b]$ gilt

Es gilt $f(I) = [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$, da auch jeder Zwischenwert $c \in J$ angenommen wird. $\square$

Def: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion auf einem Intervall $x_0 \in I$. Dann hat f eine Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in x_0 , wenn

$$f(x) = e^x - 1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} \text{ existiert.}$$


$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion mit $x_0 \notin D$ einen Berührungspunkt.

Dann hat f in x_0 einen Pol der Ordnung höchstens $k \in \mathbb{N}$, wenn

$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^k f(x)$ existiert. $f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in D$ besprochen, dann läßt sich f

auf $D \cup \{x_0\}$ in x_0 stetig fortsetzen wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ existiert mit $c \in \mathbb{R}$

Beispiele:

1) $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2+x}$ ist zunächst in $x_0=0$ nicht definiert

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ Also läßt sich in } x_0=0 \text{ mit Null stetig fortsetzen.}$$

Da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2+x} = 1$ hat f in x_0 eine Nullstelle der Ordnung wenigstens 1.

Wegen $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2+x} = +\infty$ hat f keine Nullstelle der Ordnung 2 in $x_0=0$.

2) $f(x) = e^x - 1$ hat in $x_0=0$ eine Nullstelle der Ordnung 1.

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = (e^x)'|_{x=0} = (e^x)|_{x=0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \text{ existiert nicht!}$$

3) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ hat in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ eine Polstelle der Ordnung 1

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \cdot 1 = 1, \text{ existiert.}$$

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x \ln x} ((x \ln x)')$$

$$= e^{x \ln x} (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= e^{x \ln x} (1 + \ln x) = (1 + \ln x) x^x$$