

Bsp: Sukzessive Dezimalbruchentwicklung von π

$$r_0 = 3, r_1 = 3,1, r_2 = 3,14, r_3 = 3,141, \dots$$

können wir als eine Reihe schreiben.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot 10^{-n}, \quad b_n \text{ die } n\text{-te Dezimalziffer, } \in \{0, \dots, 9\}$$

Allgemein: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann bezeichnet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \quad \text{wobei } s_k = \sum_{n=0}^k a_n \text{ die } k\text{-te Partialsumme}$$

ist, der Ausdruck als reelle Zahl nur Sinn macht, wenn die Folge s_k konvergiert.Ist die Folge (s_k) nicht konvergent, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.Bsp: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot 10^{-n} \quad b_n \in \{0, \dots, 9\}$ Dezimalzahlen. (Wir werden sehen, diese Reihe konvergiert)Satz: (Geometrische Reihe) Sei $q \in \mathbb{R}$ eine Zahl und $|q| < 1$, dann konvergiert die geometrische Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Beweis: Wir bestimmen die Partialsummen

$$s_k = \sum_{n=0}^k q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

In der Tat,

$$\begin{aligned} s_k(1-q) &= \sum_{n=0}^k q^n - \sum_{n=0}^k q^{n+1} = q^0 - q^{k+1} \\ &= 1 - q^{k+1} \quad (\text{da } q \neq 1, \text{ können wir durch } (1-q) \text{ teilen}) \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} q^{k+1}}{1-q}, \quad \text{da } |q| < 1 \text{ gilt } \lim_{k \rightarrow \infty} q^{k+1} = 0; = \frac{1}{1-q}$$

$$\text{Bsp: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1} = 2$$

Rechenregeln für konvergente Reihen

(1) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiert:1) Dann konvergiert auch $\sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j)$ mit Grenzwert $\sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ 2) $c \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch $\sum_{j=0}^{\infty} c a_j = c \sum_{j=0}^{\infty} a_j$

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } 0.\bar{9} = 0,999\dots &= \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 9 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^j = \frac{9}{10} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{j-1} = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{10-1} = \frac{1}{1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0.\bar{9} = 1,0$$

Notwendig dafür, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists k_0$.

$$|s_{k+1} - s_k| = |a_{k+1}| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

→ reicht nicht!

Bsp: harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$s_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \geq \frac{2^k}{2} \text{ und beliebig groß.}$$

Satz: (Leibniz Kriterium)

Sei (a_n) eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert.

Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Bsp: alternierende harmonische Reihe

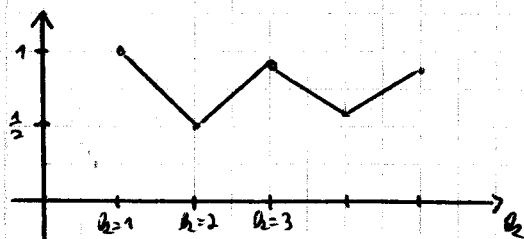
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Beweis: (s_{2k}) ist monoton fallend.

(s_{2k+1}) monoton wachsend.

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \dots \geq s_{2k+1} \geq s_{2k+3} \geq \dots$$

$$\lim s_{2k} = s = \lim s_{2k+1}, \text{ da } \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} - s_{2k} = 0$$



Bemerkung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{3}$$

Alternierende harmonische Reihe zum Sortieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{4^{n-2}} + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \text{vielfaches von } s$$

alle ungeraden
tauchen auf

alle geraden Kehrwerte tauchen auf

Im allgemeinen darf die Reihenfolge bei Summieren von Reihen nicht verändert

werden, wenn noch der gleiche Grenzwert rauskommen soll.

Def & Satz: Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

konvergiert. In dem Fall gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Beweis: $\left| \sum_{n=0}^k a_n \right| \leq \sum_{n=0}^k |a_n|$ nach der Δ -Ungleichung.

09.12.14

Bei absolut konvergenten Reihen hängt der Grenzwert nicht von der Reihenfolge der Summation ab! (kein Beweis!)

Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Wenn es ein q mit $0 < q < 1$ gibt, sodass $|a_n| \leq q^n$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis Idee: Es reicht zu zeigen, dass Partialsummen

$$s_k = \sum_{n=0}^k |a_n| \text{ beschränkt bleiben}$$

$$\sum_{n=0}^k |a_n| \leq \sum_{n=0}^k q^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} < \infty$$

Satz: (Cauchy-Produkt von Reihen)

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen.

Wir definieren:

$$c_k = \sum_{n=0}^k a_n \cdot b_{k-n}$$

Dann konvergiert die $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ebenfalls absolut und der Grenzwert ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Bemerkung: Dies ist eine Art Distributivgesetz.

Jedes Produkt $a_n \cdot b_k$ taucht in genau einem c_k auf, nämlich in c_{n+k} .

Def: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen $x_0 \in \mathbb{R}$ ein fester Punkt.

Dann nennt man eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ eine Potenzreihe}$$

Inbesondere für $x_0 = 0$ sind die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ Potenzreihen}$$

In gewisser Weise verallgemeinern Potenzreihen Polynome.

Satz: Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe und $r > 0$ konvergiert die Reihe für ein festes x mit $|x - x_0| = r$, dann konvergiert die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$. Das Supremum R aller solcher r heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist absolut konvergent $\forall x$ mit $|x - x_0| < R$

und divergiert für alle x mit $|x - x_0| > R$

Existenz des Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L_0$$

dann gilt:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L_0} & \text{falls } L_0 > 0 \\ \infty & L_0 = 0 \end{cases}$$

Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Dann wird durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

auf $I =]x_0 - R, x_0 + R[$ eine diffbare Funktion definiert, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad (\text{gliedweises ableiten})$$

Bsp: Wir betrachten die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Man rechnet nach, dass der Konvergenzradius $R = \infty$ ist.

Also: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Fkt mit Ableitung

$$(\exp')(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(x)$$

Satz: Die Exponentialfunktion genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Beweis: Nach dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Pascalsche Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \end{array}$$

$$\text{wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

Also $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$ ist das Cauchy-Produkt von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}$

$$\Rightarrow \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Bemerkung: $e = \exp(1) = 2,71828 \dots$ heißt Eulersche Zahl

$$\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$$

$$\text{allg: } \exp(m) = e^m \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\text{Schließlich } \exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (e^x)' = e^x!$$

$$\exp(-x) \cdot \exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$$

$$\Rightarrow \exp(m) = e^m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

$$\exp(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

In Potenzreihen kann man auch komplexe Zahleneinschreiben.

Def: (a_n) Folge komplexer Zahlen, $z_0 \in \mathbb{C}$, Entwicklungspunkt.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ komplexe Potenzreihe.

Konvergiert die Potenzreihe für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| = r$, dann konvergiert die Potenzreihe auf der Kreisscheibe.

$$U(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r\} \text{ absolut!}$$

Zst $R = \sup\{r \mid \exists z \text{ mit } |z-z_0| = r \text{ und } f \text{ konvergiert in } z\}$

dann konvergiert die Potenzreihe auf der Kreisscheibe.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$$

Wir sprechen deshalb von Konvergenzradius.

Bsp: $\exp$ hat Konvergenzradius $R = \infty$ definiert also eine Abbildung

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$= e^{iy} = \exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y$$