

Komplexe Exponentialfunktion

12.12.14

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{konvergiert } \forall z \in \mathbb{C} \quad (R = \infty \text{ Konvergenzradius})$$

$$\exp(z+v) = \exp(z) \cdot \exp(v) \quad \text{Funktionalgleichung}$$

Insbesondere:

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \quad \text{da } \exp(-z+z) = \exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(0) = 1$$

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$$

Speziell für rein imaginäre Zahlen

$$z = iy$$

$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

gerade ungerade

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy) \cdot \overline{\exp(iy)}$$

$$= \exp(iy) \cdot \exp(-iy)$$

$$= \exp(iy) \cdot \exp(-iy) = \exp(iy - iy) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow \exp(iy) \in \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$$

$$= \{(\cos t + i \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Folgerung: Sinus und Cosinus Reihe

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Bemerkung:

$$1) (\sin(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

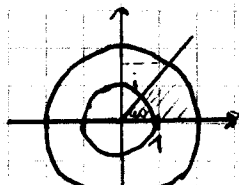
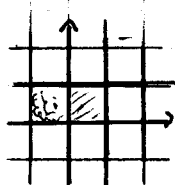
$$e^z = \exp(z)$$

$$= e^a \cdot e^{ib}$$

$$(\cos(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= -\sin(x)$$

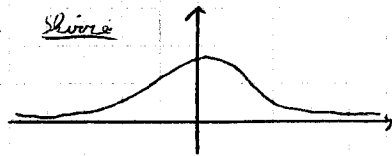
$$2) e^{i(x+iy)} = e^{ix} e^{-y} \Rightarrow \text{Additionstheorem f. sin \& cos.}$$



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

Beispiel $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Skizze



Wenn $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1$$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$ gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

notwendig für die Konvergenz ist

$$(-1)^n x^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow |x| < 1$$

8. Anwendungen der Differentialrechnung

Def. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $D \subset \mathbb{R}$ Definitionsbereich, $x_0 \in D$

a) f hat in x_0 ein lokales Maximum, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$$

gilt.

f ————— ein lokales Minimum, —————

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ ————— }$$

f hat in x_0 ein lokales Extremum, wenn f in x_0 ein lokales Minimum oder lokales Maximum hat.

b) f hat in x_0 ein globales Maximum (Minimum)

wenn

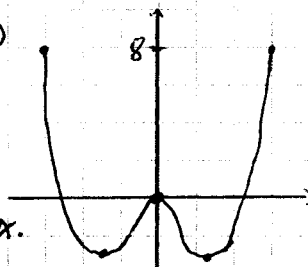
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D$$

Bsp: $f(x) = x^4 - 2x^2$, $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$\{-2, 2\}$ globales Max.

$\{-1, 1\}$ globales Min.

$\{0\}$ lokales Max.



Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine diffbare Funktion. $x_0 \in]a, b[$ ^{ein} innerer Punkt. Wenn f in x_0 ein lokales Extremum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Wir betrachten den Fall, dass x_0 ein lokales Maximum ist, also $\exists \varepsilon > 0$, so dass 12.12.14

$$U_\varepsilon(x_0) \subset]a, b[\text{ und } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0)$$

Für $x = x_0 - h$, $h > 0$ also $x < x_0$ hat Differenzquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{-h} \geq 0 \quad \text{da } f(x) \leq f(x_0)$$

$$x = x_0 + h$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{da } f(x) \leq f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

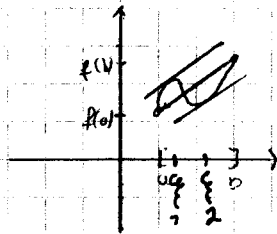
Satz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige in $]a, b[$ diffbare Funktion.

a) (Satz von Rolle): Ist $f(a) = f(b)$ dann existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass

$$f'(\xi) = 0$$

b) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Es existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ gilt.}$$



Beweis:

a) Ist f konstant, dann ist $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$.

Sei also f nicht konstant. Dann nimmt die stetige Fkt f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ das Max. und Min. an.

Da $f(a) = f(b)$, sind die Randpunkte nicht sowohl Maximum als auch Minimum.

$\Rightarrow \exists \xi = x_0$ lokales Extremum $\Rightarrow f'(\xi) = f'(x_0) = 0$
 $\xi \in]a, b[$

$$b) \quad F(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \Rightarrow F(a) = f(a) = F(b)$$

F ist diffbar in $]a, b[\Rightarrow \exists \xi \in]a, b[$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \square$$