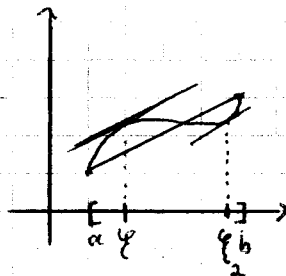


Mittelwertsatz: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
auf $]a, b[$ diffbar. Dann existiert ein
 $\xi \in]a, b[$, sodass $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$



Verallgemeinerung: $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $]a, b[$ diffbar und $g'(x) \neq 0$
 $\forall x \in]a, b[$. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$g(b) \neq g(a)$, da sonst nach dem MWS ein $\xi_2 \in]a, b[$ mit $g'(\xi_2) = 0$

Beweis Betrachten

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right]$$

Dann gilt:

$$F(a) = 0 = F(b) = f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)]$$

Nach dem MWS für F $\exists \xi$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$$

Folgerung: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $]a, b[$ diffbar

a) gilt $\exists$ in $M \in \mathbb{R}$, sodass $m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in]a, b[$

dann gilt

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x) \quad \forall x, y \in [a, b], y \geq x$$

b) gilt $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Dann ist f eine konstante Fkt.

$$f(x) = c \quad \forall x$$

c) g weitere Funktion mit Voraussetzung wie für f .

$$\text{Dann gilt: } g'(x) = f'(x) \quad \forall x \in]a, b[\rightarrow g(x) = f(x) + c$$

Beweis: a) unmittelbar aus dem MWS

$$b) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) = 0$$

$$\rightarrow f(x) - f(a) = 0 \rightarrow f(x) = f(a) = c \quad \forall x \in]a, b[$$

auch $x \in [a, b]$ wegen d. Stetigkeit

c) werden b) auf die Fkt $f(x) - g(x)$ an.

Satz: Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt (diffbar) die die Differentialgleichung

$$f'(x) = c \cdot f(x) \quad (\text{bzw. } y' = cy) \text{ erfüllt}$$

Dann existiert $A \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = A \cdot e^{cx}$

$A = f(0)$ ist dabei der sogenannte Anfangswert.

06.01.15

Beweis: Betrachten die Funktion

$$F(x) = f(x) e^{cx}$$

$$F'(x) = f'(x) e^{cx} + f(x)(-c e^{-cx}) = c f(x) e^{-cx} - c f(x) e^{-cx} = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = F(0) = f(0) = A$$

$$\Rightarrow f(x) = A e^{-cx} \quad \square$$

Beispiele

a) Zinserinz: Guthaben $f(x)$ verzinst mit 3%

$$f'(x) = c f(x) \quad c = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$$

$$\Rightarrow f(x) = A e^{1,03 \cdot x}$$

b) Radioaktiver Zerfall hier ist $c < 0$ die Strahlung ist proportional zur - Ableitung von Masse der Radioaktiven Moleküle

$$\Rightarrow f(t) = A e^{-\lambda t}, \quad \lambda \text{ Zerfallsrate, } A \text{ Ausgangsmasse}$$

Interessant ist der Zeitpunkt $T_{1/2}$

$$f(T) = \frac{1}{2} f(0) \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad (T \text{ heißt Halbwertszeit})$$

Satz: (Monotoniekriterium)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $]a, b[$ diffbar.

Dann gilt:

Ist $f'(x) \geq 0$, dann ist f monoton wachsend

Ist $f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton wachsend

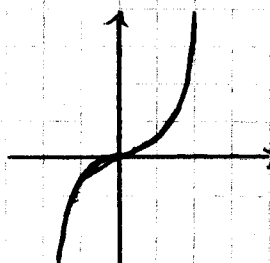
Ebenso für $f'(x) \leq 0 \rightarrow$ monoton fallend

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

Beweis: $f'(x) \geq 0 \Rightarrow \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0 \quad \forall y \geq x \text{ in } [a, b]$

Bemerkung: $f(x) = x^3$ ist

stetig monoton, aber $f'(0) = 0 \geq 0$



Satz: (Regeln von l'Hospital) Sei $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ diffbare Fkt

$$\text{und } \lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} g(x)$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analoges gilt für $x \searrow a$ und die Fälle $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ sind auch erlaubt

Beweis: Nur der 1. Fall:

Ergänzen f, g durch $f(b) = g(b) = 0$ zu stetigen Fkt auf $]a, b[$ und
verwenden der reellg. MWS.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{wobei } \xi = \xi(x) \in]x, b[$$

Mit $x \nearrow b$ gilt dann $\xi(x) \rightarrow b$

$$\Rightarrow \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow b} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \square$$

Bsp:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{2x} = \frac{-1}{2}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad ; \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x-2}{x+1} \quad \text{Set Wert } -\frac{1}{2} \text{ an der Stelle } x=1$$

$$b) \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = x \quad f(0) = 0 = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$c) \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x} = \frac{0}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

d) Die Voraussetzung $f(b) = g(b) = 0$ zu überprüfen, das man nicht vergisst!

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 4x - 2, \quad b = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{4x-2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq 1 \quad f(1), g(1) \neq 0$$

a) Die Exponentialfkt $\exp(x) = e^x$

wächst schneller gegen ∞ als jedes Polynom, bzw.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

b)

Der Logarithmus $\ln x$ wächst langsamer als jede Potenzfkt.

x^α mit $\alpha > 0$

Bew: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

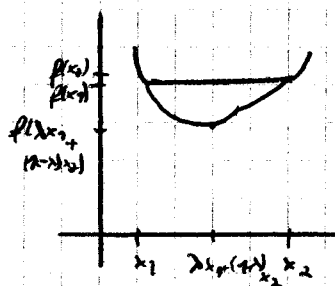
$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

Def + Satz: (Konvex, Konkav)

Eine Fkt $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex auf dem Intervall $]a, b[$ wenn folgendes gilt:

Für $x_1 < x_2$ auf $]a, b[$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$



Die Strecke von dem Punkt $(x_1, f(x_1))$ nach $(x_2, f(x_2))$ wird durch $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2))$ $\lambda \in [0, 1]$ parametrisiert.

Die Ungleichung besagt: "die Strecke" liegt oberhalb des Graphen von $f|_{[x_1, x_2]}$
 f heißt konkav, wenn

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Ist f zwei mal diffbar und gilt $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ dann ist f konvex

Falls $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$, dann ist f konkav