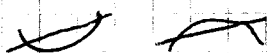
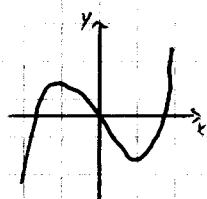


konvex / konkav

09.01.15



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 2x diffbar ist, konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$



$$y = x^3 - x$$

konkav $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Punkte $f''(x_0) = 0$ heißen Wendepunkte

Satz (Newton Verfahren zur Nullstellenbestimmung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ 2x mal diffbar $f(a) < 0, f(b) > 0$ und f sei konvex also $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Dann gilt:

a) Die Funktion f hat in $[a, b]$ genau eine Nullstelle. ξ also $f(\xi) = 0$

b) Für $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) > 0$ betrachte wir die rekursiv def. Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

c) Gilt $f'(x) \geq c > 0$ und $f''(x) \leq k$ für alle $x \in [\xi, b]$, so ist

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{k}{2c} |x_n - x_{n-1}|^2$$

Man sagt das Verfahren konvergiert quadratisch (viel besser als Intervallhalbierung).

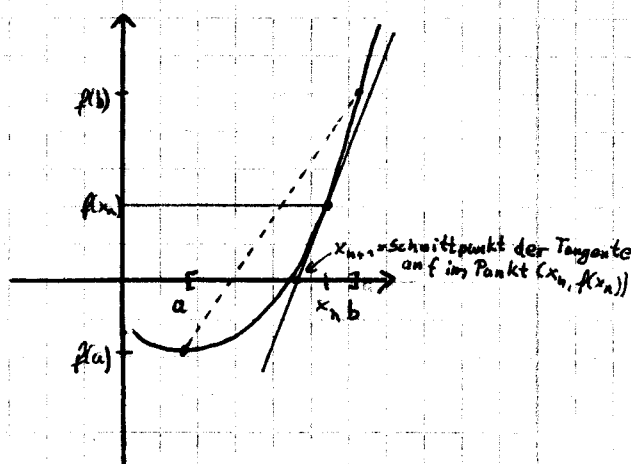
Bsp: $f(x) = x^2 - b$

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - b}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{b}{x_n} \right)$ gilt das Verfahren Berechnung der Quadratwurzel. $\xi = \sqrt{b}$

Konkret $b=2 \quad x^2 - 2 = 0$?

n	x_n	$\frac{2}{x_n}$
0	2	1
1	1,5	$\frac{2}{1,5} = \frac{4}{3} = 1,3$
2	1,416	

$$\sqrt{2} = 1,4142...$$



Beispiel: Kurvendiskussion von

$$f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2} \text{ auf } [-1, 1]$$

Nullstellen: $x_0 = -1, 1$

lokale Extrema: $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + (x+1) \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)$
 $= \frac{1-x^2-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

Nullstellen des Zählers: $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$
 $= \frac{-1}{4} \pm \frac{3}{4} \in \{-1, +\frac{1}{2}\}$

$$f''(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})(-4x+1) - \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}(-2x^2-x+1)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1-x^2)(-4x+1) - \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}(-2x^2-x+1)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{2x^3-3x+1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{(2x^3-3x+1)(x-1) - (2x^3-2x^2)}{2x^3-2x^2}$$
$$\frac{2x^3-3x+1}{2x^3-2x^2}$$
$$\frac{-x+1}{-x+1}$$

Mögliche Wendepunkte: $x=1$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in [-1, 1], -\frac{1-\sqrt{3}}{2} \notin [-1, 1]$$

Kapitel 9 Taylorentwicklung

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine diffbare Funktion $x_0 \in I$.

Die Gleichung der Tangente an f in Punkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Ist f n -mal diffbar, $x_0 \in I$, dann heißt

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

das Taylorpolynom von f an der Stelle x_0 . Dies ist das eindeutig bestimmte

Polynom T_n -ten Grades, in x $T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ ist

welches an der Stelle x_0 die gleichen höheren Ableitungswerte und Funktionswerte hat wie f .

Bsp: $f(x) = \cos x$

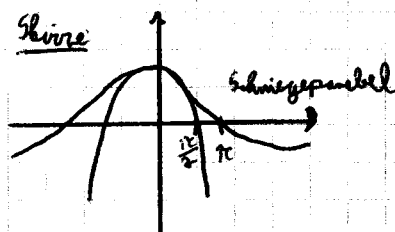
$$T_2(\cos, 0, x) = 1 + 0(x-0) - \frac{1}{2!}(x-0)^2$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2}$$

$x_0 = 0 \quad \cos 0 = 1$

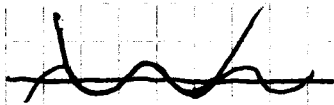
$\cos'(x) = -\sin x$

$\cos'(0) = 0$

$(\cos'')(0) = -\cos(0) = -1$



$$T_n(\cos, 0; x)$$



09.01.15

$$T = T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$T^{(j)} = \sum_{k=j}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)\dots(k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$$

$$T^{(j)}(x_0) = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \underbrace{j(j-1)\dots(j-j+1)}_{j!} \underbrace{(x-x_0)^0}_1 = f^{(j)}(x_0) \quad \square$$

Satz: (Fehlterglied der Taylorapproximation)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal diffbar und $x_0 \in I$.

Dann gilt für den Fehler

$$f(x) - T_n(f, x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0$$

$$\rightarrow |f(x) - T_n(f, x_0; x)| \leq k \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ falls } |f^{(n+1)}(\xi)| \leq k \text{ für alle } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0$$

Def: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft diffbar und $x_0 \in I$. Dann heißt die Potenzreihe

$$T(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \text{ die Taylorreihe von } f \text{ im Punkt } x_0$$

Bsp: $T(\cos, 0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ist die Cosinus Reihe!

$$f(x) = \exp(x) \quad T(\exp, 0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Satz: Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Dann stimmt die Taylorreihe von f im Punkt x_0 mit dieser Potenzreihe

überein. Insbesondere $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Beweis: f ist diffbar auf $I =]-R+x_0, x_0+R[$ und hat die Potenzreihenentwicklung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1} \text{ die wir ausgliedern aus d. Abl. bekommen}$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-j+1)(x-x_0)^{n-j} \quad x_0=0 \text{ einsetzen}$$

Ger. (Identisch für konvergente Potenzreihen) gilt $f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$

so folgt $a_n = b_n \quad \forall n$ für $|x| < R, R > 0$