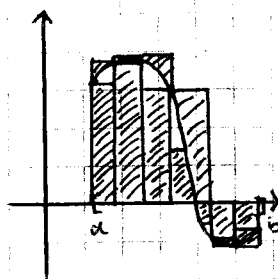


Satz:

Stetige Funktion auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen sind integrierbar.



$Q_n - U_n \rightarrow 0$  weil  $f$  stetig ist

Geometrische Interpretation

- Fläche unter/über Graphen und Variieren
- $v(t)$  die Geschw. zum Zeitpunkt  $t$ . Das Teilchen bewegt für  $t \in [a, b]$   
 $\int_a^b v(t) dt$  ist die Entfernung des Teilchens zum Zeitpunkt  $b$  & Zeitpunkt  $a$
- $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Kraft.  
 $\int_a^b F(s) ds$  ist die Arbeit, die die Kraft verrichtet wenn das Objekt von  $a$  nach  $b$  im Kraftfeld bewegt wird.

Satz:

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $c \in \mathbb{R}$

Dann gilt:

$$a) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$b) \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$c) g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b], \text{ dann gilt: } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

Man sagt: (a) & b), das Integral ist linear und c) monoton

Def + Satz:

1) Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $c \in ]a, b[$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



$$2) \text{ Wir setzen } \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

3) Mit dieser Notation gilt dann für beliebige  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

sofern  $f$  auf dem größten vorhandenen Intervall stetig ist.

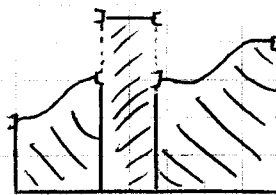
### Bemerkung:

Auch stückweise stetige Funktionen sind integrierbar.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stückweise stetig, wenn es eine Unterteilung  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = b$  gibt und stetige Funktionen

$f_j: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f_j|_{[t_{j-1}, t_j]} = f|_{[t_{j-1}, t_j]} \text{ gilt.}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_j(x) dx$$



### Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und

$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stückweise stetige Fkt und  $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx$$

Im Spezialfall  $\varphi \equiv 1$  erhalten wir also:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a) \text{ für ein } \xi \in ]a, b[$$

### Beweis:

$f$  ist stetig, also werden

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_{\min})$$

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_{\max}) \text{ angenommen}$$

$$m \varphi(x) \leq f(x) \varphi(x) \leq M \varphi(x) \text{ da } \varphi \geq 0$$

Wobei gilt:

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

Im Fall:  $\int_a^b \varphi(x) dx = 0$  ist die Aussage klar, sonst:

$$f(x_{\min}) = m \leq \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M = f(x_{\max})$$

Nach dem ZWS existiert ein  $\xi$  zwischen  $x_{\min}$  &  $x_{\max}$ , so dass:

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx}. \text{ Die Behauptung folgt.}$$

Eine Funktion (diffbar)  $F: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[$$

Sind  $F_1$  &  $F_2$  Stammfunktionen von  $f$ , dann gilt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , sodass

$$F_1(x) = F_2(x) + c$$

Beweis:  $(F_1 - F_2)' = f - f = 0 \Rightarrow F_1 - F_2$  ist konstante Funktion.

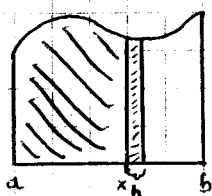
Def + Satz: Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist die durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

für  $x \in [a, b]$  definierte Funktion eine Stammfkt von  $f$  auf  $]a, b[$ . Man schreibt

auch:  $F = \int f(t) dt$  und nennt  $F$  ein unbestimmtes Integral von  $f$  oder auch

das unbestimmte Integral von  $f$ .



$$y = f(x)$$

$$F(x)$$

Differenzquotienten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{1}{h} \cdot f(\xi) \cdot [x+h-x] = f(\xi)$$

wobei  $\xi$  zwischen  $x$  &  $x+h$  liegt.

Mit  $h \rightarrow 0$  steht  $\xi \rightarrow x$  und  $f$  stetig  $\Rightarrow F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$   $\square$

Satz: (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig;  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $]a, b[$ .

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$$

$$f(x) = x^n, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$  ist eine Stammfunktion von  $f$

$$\Rightarrow \int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) = F(b) - F(a)$$

Beweis:

Es sei  $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Dann ist  $F_0$  eine Stammfunktion und  $F(x) = F_0(x) + c$  nach beiden vorangehenden Sätzen.

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

### Beispiele:

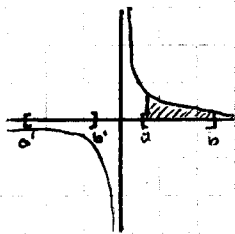
1)  $f(x) = x^s$ ,  $s \neq -1$  hat die Stammfkt  $F(x) = \frac{1}{s+1} x^{s+1}$

2)  $f(x) = \frac{1}{x}$  stetig auf  $D = \mathbb{R}_{>0}$  (oder  $D = \mathbb{R}_{<0}$ )

Stammfkt auf  $D = \mathbb{R}_{>0}$  ist

$$F(x) = \ln(x)$$

Stammfkt auf  $D = \mathbb{R}_{<0}$  ist  $F(x) = \ln|x|$ ,  $x < 0$   $F(x) = \ln(-x)$ ;  $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$   
2. Ableit.  
1. Ableit.



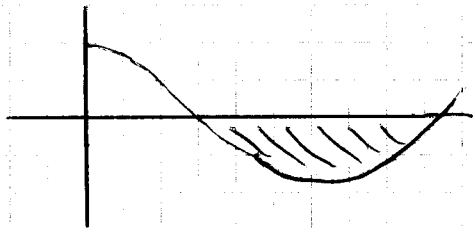
$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Im Fall  $0 < a < b$

$$\int_{a'}^{b'} \frac{1}{x} dx = \ln(b') - \ln(a') = \ln\left(\frac{b'}{a'}\right) < 0 \quad \left|\frac{b'}{a'}\right| < 1$$

$$a' < b' < 0$$

Bsp  $F(x) = \sin x$  ist die Stammfunktion  $f(x) = \cos(x)$



$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos x dx = \underbrace{\sin(a+2\pi)}_{\sin(a)} - \sin(a) = 0$$