

• $f(x) = e^x$ hat die Stammfunktion $F(x) = e^x$

Schreibweise: $\int e^x dx = e^x$ $\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$

• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ hat die Stammfkt $F(x) = \arcsin(x)$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(b) - \arcsin(a)$$

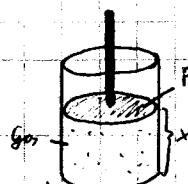
• $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$

• $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan(x)$

Bsp. Ideales Gas dehnt sich im zylindrischen Gefäß aus.

F = Fläche d. Kolbens

p = Druck (hängt ab von x)



$$V(x) = x \cdot F$$

$$p(x) \cdot V(x) = \text{konstante} = p(a) \cdot V(a)$$

$$A = \int_a^b F \cdot p(x) dx = F \cdot \int_a^b p(x) dx = F \int_a^b \frac{p(x) \cdot V(x)}{V(x)} dx = F \cdot \int_a^b \frac{p(a) \cdot V(a)}{F \cdot x} dx$$

$$= p(a) \cdot V(a) \int_a^b \frac{1}{x} dx = p(a) \cdot V(a) \left(\ln x \right) \Big|_a^b = p(a) \cdot V(a) (\ln b - \ln a) = p(a) \cdot V(a) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Satz:

Sei $f:]-\infty + x_0, x_0 + \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ durch die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ gegeben.

Dann ist eine Stammfunktion $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$ auf $]x_0 - \infty, x_0 + \infty[$.

Beweis: f, F haben den gleichen Konvergenzradius R . $F'(x)$ erhalten wir durch gliederweises ableiten, also $F'(x) = f(x)$ $\square$

Satz:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

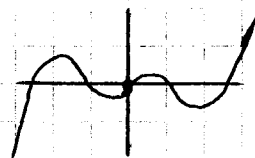
a) Ist f eine ungerade Funktion also $f(-x) = -f(x)$

so sind die Stammfunktionen von f gerade Funktionen.

$$F(x) = \int f(x) dx ; F(-x) = F(x)$$

b) Ist f eine gerade Funktion also $f(-x) = f(x)$, dann ist genau eine Stammfunktion $F(x)$

von f eine ungerade Funktion also $F(-x) = -F(x)$



Beweis: a) $g(x) = F(-x)$, $F(x) = \int f(x) dx$,

$$(g(x))' = F'(-x) \cdot (-1) = -f(-x) = f(x) \Rightarrow g(x) \text{ ist ebenfalls eine Stammfunktion}$$

$$\Rightarrow g(x) = F(x) + c, \text{ Also } F(-x) = F(x) + c$$

Inb. $F(-0) = F(0) + c \rightarrow c = 0$

Also $F(x) = F(-x)$, F ist gerade, insbesondere $\int_{-a}^a f(x) dx = F(a) - F(-a) = 0$

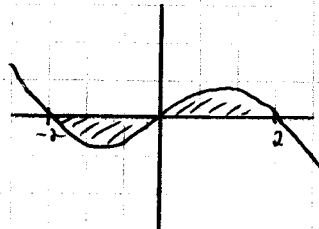
b) geht ähnlich, $F(-x) = -F(x)$.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = F(a) - F(-a) = 2F(a) = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$$

Beispiel 1: $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 4x - x^3 = x(4 - x^2) = -x(x+2)(x-2)$$

Wir wollen die eingeschlossene Fläche vom Graphen und der x-Achse berechnen.



$$\int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 -f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \left(-2x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2$$

$$= 0 - (-8 + 4) + 4 = 8$$

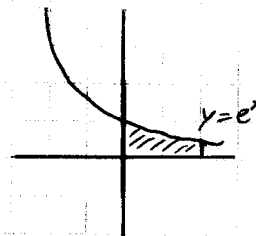
Beispiel 2:

$$f(x) = e^{-x}$$

$$\int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^b = 1 - e^{-b}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

$$=: \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$



Def: (Uneigentliche Integrale)

Sei $f: [a, \infty)$ stetig und existiert ein Grenzwert.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \text{ dann bezeichnet } \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \text{ und heißt un eig. Integral}$$

Analog definieren wir für $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \text{ und schließlich für } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx \text{ sofern beid Grenzwerte existieren.}$$

Das Resultat hängt nicht von c ab.

Falls $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ nicht so nicht definieren lässt, aber $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx$ existiert, dann

nennen wir $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx$ den Hauptterm des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx$ hat den Hauptterm 0, da die Stammfkt $-\cos(x)$ gerade ist, aber

$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b \sin(x) dx$ existiert nicht, da $\cos(x)$ zwischen ± 1 oszilliert.

Beispiel:Existiert $\int_1^{\infty} x^{\alpha} dt$?

$$\int_1^b x^{\alpha} dt = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_1^b \quad \alpha \neq -1$$

$$= \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}$$

der Grenzwert für $b \rightarrow \infty$
existiert genau dann wenn
 $\alpha+1 < 0$

Notation:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} \text{ existiert nicht}$$

und dann $\int_1^{\infty} x^{\alpha} dt = -\frac{1}{\alpha+1}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{r-1}$$

$r = -\alpha$ existiert, wenn $-r+1 < 0$

$$r > 1$$

Def:

Sei $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, nicht notwendig beschränkt. Falls $\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx$ existiert,
dann heißt f über $[a, b[$ ungerichtet integrierbar und $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx$
Analog: $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, definieren wir $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx$.

Schließlich f auf $[a, c[\cup]c, b]$ stetig ist und jeweils ungerichtet integrierbar
so definieren wir $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Gelegentlich, $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \left[\int_a^t f(x) dx + \int_t^b f(x) dx \right]$ und nennt c als Hauptwert.
des ungerichteten Integrals.

$$\int_0^1 x^{\alpha} dx = ? \quad ; \quad \int_0^1 x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} - 0^{\alpha+1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha+1}, \text{ wenn } \alpha+1 > 0.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{1-r} \text{ existiert wenn } -r+1 > 0 \Leftrightarrow r < 1.$$

11. IntegrationsverfahrenSatz: (logarithmische Integration)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar mit stetiger Ableitung $f'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = (\ln |f(x)|) \Big|_a^b$$

Beweis: Z1 $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$. Dann ist $F(x) = \ln(f(x))$ definiert und nach der

Kettenregel ergibt sich $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Also F ist eine Stammfunktion $\frac{f'(x)}{f(x)}$

die Behauptung folgt mit dem Hauptsatz.

Zst $f < 0$ dann ist $F(x) = \ln(-f(x)) = \ln|f(x)|$ definiert und die Kettenregel gibt:

$$F'(x) = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \square$$

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\int_a^b \tan x dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) \Big|_a^b \quad \left(-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\ln(\cos x) \Big|_0^b = -\ln(\cos b) - 0$$

Die Produktregel fürs Ableiten impliziert:

Satz: (partielle Integration)

Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbare Fkt.

Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Beweis: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\int_a^b (f(x)g(x))' dx = f(x)g(x) \Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx \Rightarrow \text{Formel}$$

Beispiel:

$$1) \int_0^x t e^t dt = t e^t \Big|_0^x - \int_0^x 1 e^t dt$$

$$t = g(t) \quad g'(t) = 1$$

$$e^t = f'(t) \quad f(t) = e^t$$

$$= x e^x - e^x = (x-1)e^x$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (\text{Probe: } ((x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = x e^x)$$

$$2) \int_1^x \ln(t) dt = t \ln(t) \Big|_1^x - \int_1^x 1 dt = x \ln x - x + 1$$

$$g(t) = \ln t \quad g'(t) = \frac{1}{t}$$

$$f(t) = 1 \quad f'(t) = 1$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) \quad (\text{Probe: } (x(\ln x - 1))' = (\ln x - 1) + x \frac{1}{x} = \ln x dx)$$