

Beispiel:

$$3) \int_0^x \cos^2 t \, dt = \int_0^x \underbrace{\cos t}_{f'} \underbrace{\cos t}_g \, dt \quad f = \sin t, \quad g' = -\sin t$$

$$= \sin t \cos t \Big|_0^x - \int_0^x -\sin^2 t \, dt$$

$$= \sin t \cos t \Big|_0^x + \int_0^x (1 - \cos^2 t) \, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x \cos^2 t \, dt = \sin x \cos x + x$$

$$\Rightarrow \int_0^x \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x)$$

$$\text{Probe: } \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x)' = \frac{1}{2} (\cos(x) \cos x - \sin x \sin x + 1) = \frac{1}{2} (\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 1) = \cos^2 x.$$

Die Kettenregel gilt:

Satz: (Substitutionsregel)Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F $g: [c, d] \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann gilt:

$$\int_c^d f(g(t)) g'(t) \, dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x) \, dx = \left(F(x) \Big|_{g(c)}^{g(d)} = F(g(d)) - F(g(c)) \right).$$

Beweis:

$$h(t) = F(g(t)) \text{ hat die Ableitung } h'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

$$\text{HS} \Rightarrow \int_c^d f(g(t)) g'(t) \, dt = h(t) \Big|_c^d = F(g(t)) \Big|_c^d = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x) \, dx.$$

Beispiele:

a) Die Regel für das logarithmische Integral ist ein Spezialfall:

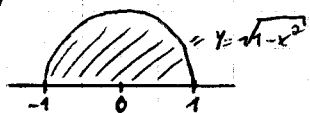
$$\int_c^d \frac{g'(t)}{g(t)} \, dt = \ln|g(t)| \Big|_c^d \quad (f(x) = \frac{1}{x} \quad F(x) = \ln x)$$

$$b) \int_0^2 3r \sqrt{3r^2 + 4} \, dr \quad ; \quad x = g(r) = 3r^2 + 4, \quad g'(r) = 6r$$

$$\int_0^2 3r (\sqrt{3r^2 + 4}) \, dr = \frac{1}{2} \int_0^2 g'(x) \sqrt{g(x)} \, dx = \frac{1}{2} \int_{g(0)=4}^{g(2)=16} \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{16} = \frac{1}{3} (64 - 8) = \frac{1}{3} 56.$$

$$c) \int_c^d (g(t))^n g'(t) \, dt = \int_{g(c)}^{g(d)} x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \frac{1}{n+1} [g(b)^{n+1} - g(a)^{n+1}]$$

d)



$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$x = \sin(t) = g(t), \quad y'(t) = \cos t \quad t = \arcsin x$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cos t dt$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \sin t + t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}$$

Volumenberechnung

Satz: (Prinzip von Cavalieri)

a) Gegeben seien zwei Körper V_1, V_2 (beschränkt). Für $z \in \mathbb{R}$ bezeichne $E_z = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\}$

Angenommen die Fläche $V_1 \cap E_z$ und $V_2 \cap E_z$ haben den gleichen Flächeninhalt $\forall z \in \mathbb{R}$

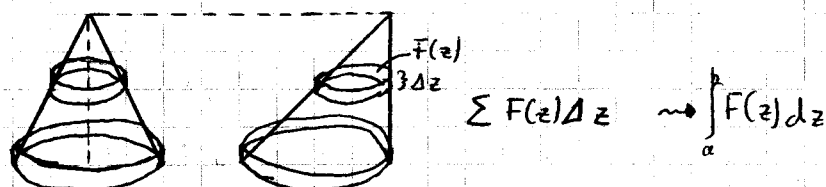
Dann haben V_1 & V_2 das gleiche Volumen

b) Wird die Fläche $V_1 \cap E_z$ durch die stetige Funktion $F(z)$ beschrieben, dann hat V_1

das Volumen $V = \int_a^b F(z) dz$ wobei a, b gewählt sind, dass die Ebene E_z mit

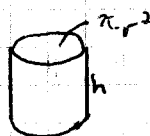
$z \in [a, b]$, V_1 nicht schneiden.

Begründung:



Beispiele: Zylinder der Höhe h über Kreis und Radius r hat das Volumen

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



$$= \int_0^h \pi r^2 dz$$

Archimedes:



1

:

2

:

3

$$F(z) \mid \text{Kreis mit Radius } r-z \quad \int_0^r \pi(r-z)^2 dz = \pi \left[-\frac{1}{3}(r-z)^3 \right]_0^r = \frac{1}{3} \pi r^3$$

Halbkugel

$$V = \int_0^r \pi(r^2 - z^2) dz$$



$$F_z \cap \text{Halbkugel} = \text{Kreis m. Radius } \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$= \pi(r^2 z - \frac{1}{3} z^3) \Big|_0^r = \pi(r^3 - \frac{1}{3} r^3) = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad \text{Hat Radius } r \text{ & Volumen } \frac{4}{3} \pi r^3$$

Volumen eines Rotationskörpers mit Radius $g(z) \geq 0$

$$V = \int_a^b \pi g(z)^2 dz$$

Kugel = Rotationskörper über der Halbkreis

$$V = \int_{-r}^r \pi (\sqrt{r^2 - z^2})^2 dz = \pi \int_{-r}^r (r^2 - z^2) dz$$

$$= \pi \left(r^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

12. Spezielle Funktionen

Def: Eine Funktion (auf $D \subset \mathbb{R}$) heißt "elementar" wenn sie sich durch Addition, Multiplikation, Division, Potenzen mit allen Exponenten und Verkettung, aus Polynomen und der Exponentialfunktion, den trigonometrischen Funktionen und den Umkehrfunktionen erhalten läßt.

Nicht jede elementare Funktion hat eine Stammfunktion die ebenfalls elementar ist.

Bsp: e^{-x^2} hat keine elementare Stammfunktion (Lionelle)

Einige Funktionen werden also nur als Stammfunktion erklärt.

Def: a) Der Fehlerfkt erf(x) ist durch die Formel

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

definiert.

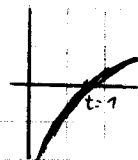
b) Der Integralcosinus ist durch das Integral

$$\text{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad x > 0$$

definiert.

c) Der Integrallogarithmus $\text{Li}(x)$ für $x > 0, x \neq 1$

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$



dabei ist für $x > 1$ der Hauptwert des uneigentlichen Integrals zu nehmen

$$\text{Li}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{1-h} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+h}^x \frac{dt}{\ln t}$$

d) Die Integralsponentialfunktion $\text{Ei}(x)$ ist für $x \neq 0$

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

wobei für $x > 0$ wieder der Hauptwert zu nehmen ist.

e) Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ ist für $x > 0$ durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ erklärt.}$$

Satz:

a) Die Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x)$ ist eine ungerade Funktion und $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$

b) Für die Gammafunktion gilt: $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ insbesondere $\Gamma(n+1) = n!$

c) Keine dieser Funktionen ist elementar

Def. & Satz:

Die Hyperbelfkt ist durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ definiert.}$$

Es gilt:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Bemerkung: $\cosh$ beschreibt den Verlauf einer Kette die in zwei Punkten aufgehängt ist.

Es gilt: $(\sinh(x))' = \cosh(x)$, $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

$$\boxed{y'' = y}$$