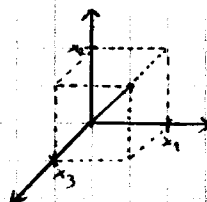


Def: Zu einem Punkt $P=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ (bzw. $P=(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$)

heißt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ der zugehörige Ortsvektor bzw. Spaltenvektor.}$$

$$\text{(bzw. } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2)$$

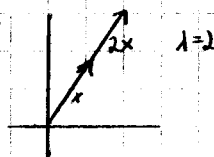


Vektoren kann man addieren.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation: $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$



Skalarprodukt: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$$:= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Norm oder Länge des Vektors.

Kreuzprodukt: (nur für $\mathbb{R}^3$)

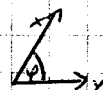
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Satz: a) Sind $x, y \in \mathbb{R}^3$, dann bilden die Punkte $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x, y, x+y \in \mathbb{R}^3$ ein Parallelogramm.

b) Für $P=(x_1, x_2, x_3), Q=(y_1, y_2, y_3)$ beschreibt $\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$ den Vektor, der in P beginnt und Q Endet. (Parallel zum Anfangspunkt Ursprung).
Die Punkte auf der Strecke von P nach Q haben die Ortsvektoren

$$\{x + \lambda(y-x) \mid \lambda \in [0, 1]\} = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

c) Für das Skalarprodukt gilt $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi$



wobei φ der Winkel zwischen x und y ist.

Insbesondere gilt: $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x$ und y stehen senkrecht aufeinander. (für $x, y \neq 0$)

d) Für das Kreuzprodukt gilt:

$$\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \varphi \quad (\varphi \text{ der Winkel zwischen } x \text{ und } y)$$

e) Für das Skalarprodukt und Kreuzprodukt gilt:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$$x \times y = -y \times x, \quad (x+y) \times z = x \times z + y \times z$$

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y), \quad (\lambda x) \times y = \lambda(x \times y) \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ ein Skalar}$$

$$f) x \times (y \times z) = \underbrace{(x \cdot z)}_{\in \mathbb{R}} y - (x \cdot y) z$$

$x \cdot (x \times y) = 0, \quad y \cdot (x \times y) = 0$, mit anderen Worten, $x \times y$ steht senkrecht auf x und y .

$$|x(y \times z)| = \text{vol} \underbrace{\{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]\}}_{\text{Parallelepiped}}$$

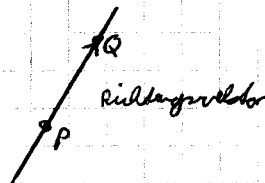
Satz:

Sind $P \neq Q \in \mathbb{R}^3$ (bzw. $\in \mathbb{R}^2$) zwei Punkte, dann beschreibt

$$g = \{P + \lambda(Q-P) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch P und Q

P heißt Aufpunkt, $Q-P=v$



$g = \{x + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad x, v \in \mathbb{R}^3$ nennt man auch die Parameterdarstellung der Geraden.

Im Fall $\mathbb{R}^2$ haben wir auch die Koordinatengleichung für die Gerade.

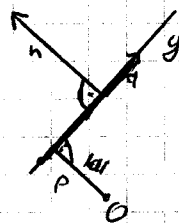
$$g = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid n \cdot x = d\} \quad n \text{ Normalenvektor} = \text{Vektoren senkrecht.}$$

zum Richtungsvektor v , den man normiert wählen kann $\|n\|=1$.

Ist n normiert ($\|n\|=1$), dann ist

$|d|$ der Abstand von g

zum O -Punkt.



$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 = c \right\}$$

dann ist $n = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ normierter normaler Vektor, bis auf Vorzeichen $d = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

der Abstand zum Nullpunkt.

Satz: P_0, P_1, P_2 3-Punkte auf einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ die nicht auf einer Geraden liegen.

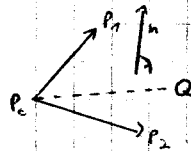
$$\text{dann ist } E = \{P_0 + \lambda(P_1-P_0) + \mu(P_2-P_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \underbrace{\{x_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}}_{\text{Liniert.}} \quad v_1, v_2 \rightarrow \text{Richtungsvektoren}$$

Gleichung bzw. Koordinatendarstellung der Ebene:

03.02.15

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid n \cdot x = d \right\}$$



n Normalenvektor zur Ebene (normiert häufig)

$|d|$ Abstand der Ebene zum Nullpunkt. Man kann $n = v_1 \times v_2$ wählen.

zwei Ebenen $E = \{x_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

und $E' = \{x_0' + \mu_1 v_1' + \mu_2 v_2' \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\}$

sind parallel wenn

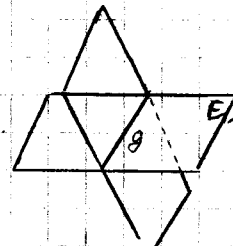
$v_1 \times v_2$ und $v_1' \times v_2'$ bis auf einen Faktor $c \in \mathbb{R}$ übereinstimmen

bzw. $(v_1 \times v_2) \cdot v_1' = 0$; $(v_1 \times v_2) \cdot v_2' = 0$ oder $(v_1 \times v_2) \times (v_1' \times v_2') = 0$ gilt

Satz:

Sind $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$ zwei Ebenen die nicht parallel sind,

dann ist $E_1 \cap E_2 = g$ eine Gerade.



Die Parameterdarstellung der Geraden kann man durch Lösen eines LGS lösen.

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dann liefert $E_1 \cap E_2$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

3 lineare Gleichungen in 4 Unbestimmten.

$$x_i + \lambda_1 v_{i1} + \lambda_2 w_i = y_i + \mu_1 u_i + \mu_2 z_i \quad (i=1,2,3)$$

Bsp:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}; \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Gleichungssystem:

$$1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 1 + \mu_1 + \mu_2$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1} = -\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 \quad (\text{aus 1. Gleichung})$$

$$1 + \lambda_2 = 1 - \mu_1 + \mu_2$$

$$\underline{\lambda_2} = -\mu_1 + \mu_2$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2\mu_2$$

$$\lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 + \lambda_2 = 1 + 2\mu_2$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda_2 - \mu_1 = 1 + 3\mu_2 \rightarrow (\lambda_2 \text{ einsetzen})$$

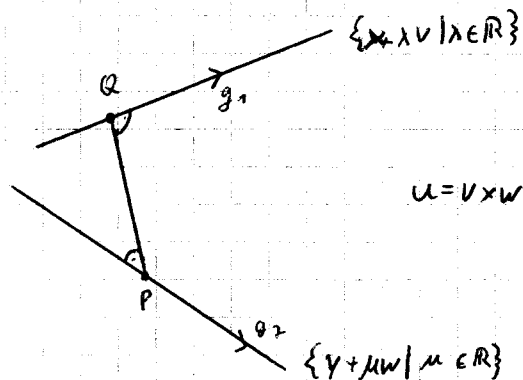
$$2(-\mu_1 + \mu_2) - \mu_1 = 1 + 3\mu_2$$

$$\Leftrightarrow -3\mu_1 = 1 + \mu_2$$

$$\underline{\mu_2} = -3\mu_1 - 1$$

$$\Rightarrow g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3\mu_1 - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \mu_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \mid \mu_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = E_1 \wedge E_2$$



$$E = \{x + \lambda v + \mu u\} \cap g_2 = \{P\}$$

$$E' = \{y + \mu w + \lambda u\} \cap g_1 = \{Q\}$$

Kap. 14 Der $\mathbb{R}^n$ und allgemeine Vektorräume

Def & Satz: $\mathbb{R}^n$ die Menge der Spaltenvektoren mit n Komponenten

$\mathbb{R}^n = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ bildet ein Vektorraum mit Vektoradd. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad (\text{Skalarmultiplikation})$$

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$x, y, z \in \mathbb{R}^n; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{Assoziativgesetz}$$

$$x + y = y + x \quad \text{Kommutativgesetz}$$

$$x + 0 = x \quad \text{Neutrales Element d. Addition}$$

$$x + (-x) = 0 \quad \text{additives Inverses}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x \end{aligned} \right\} \text{Distributivgesetz}$$

$$(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x) \quad \text{2. Assoziativgesetz}$$

$$1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = 0 \in \mathbb{R}^n; \quad \lambda \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}^n$$

Regeln für Skalarprodukt

03.02.15

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x+y) \cdot z = z \cdot x + z \cdot y$$

Vektoradd.

Skalaradd.

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x(\lambda y)$$

$$\vec{0} \cdot x = 0 \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot x \geq 0 \text{ und } x \cdot x = 0 \text{ nur dann wenn } x = 0$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ Dreiecksagl.}$$

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ (Schwarsche Ungl.)}$$