Regeln fürs Skalarprodukt

03.02.15

(**)

$$\begin{cases} x\cdot y = y\cdot x & \left(x\cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ und die Norm } \|x\| = \sqrt{x\cdot x}\right) \\ (x+y)\cdot z = z\cdot x + z\cdot y \\ \quad\uparrow\text{Vektoradd.} \quad \uparrow\text{Skalaradd.} \\ (\lambda x)\cdot y = \lambda(x\cdot y) = x(\lambda y) \\ \vec{0}x = 0 \in \mathbb{R} & x\cdot x \geq 0 \text{ und } x\cdot x = 0 \text{ nur dann wenn } x = 0 \end{cases}$$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksgl.

$|x\cdot y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ (Schwarzsche Ungl.)

Beweis von Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung

06.02.15

1) Die Formel gilt wenn $x=0$ oder $y=0$.

Sei also $x \neq 0, y \neq 0$, etwa $\|x\| = 1, \|y\| = 1$

Dann gilt:

$$0 \leq \|x-y\|^2 = x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y = 1+1-2xy$$

also $2xy \leq 2$ bzw. $x\cdot y \leq 1$

Genau so folgt aus $\|x+y\|^2 \geq 0$, dass $-1 \leq x\cdot y$

Im allg. Fall:

$$|x\cdot y| = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\Big|\underbrace{\frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{y}{\|y\|}}_{\leq 1}\Big| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

Die Monotonie der Umkehrfkt gibt die Bestätigung $\square$

Def. und Satz:

a) Sei D eine nicht leere Menge und $F_{D,n} = \{f: D \to \mathbb{R}^n\}$

Mit $0 \in F_{D,n}$ wird die Nullabb. bezeichnet.

zu $f,g \in F_{D,n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren $f+g, \lambda f \in F_{D,n}$ durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Dann gelten für diese Additionen und Skalarmultipl. sinngemäß die Regeln (*)

b) Ist V eine nicht leere Menge, zusammen mit zwei Abbildungen

$+ : V \times V \to V \,,\; (x,y) \mapsto x+y$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \,,\; (\lambda, x) \mapsto \lambda x$

mit einem 0-Vektor $0 \in V$, so dass die Regeln (*) gelten, dann heißt V ein Vektorraum.

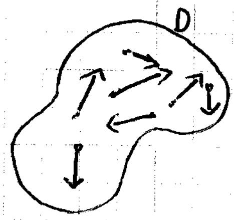
Beispiel:

$D \subset \mathbb{R}^2$, Gebiet $f \in F_{D,2}$

Eine Strömung in D gibt ein Vektor in $F_{D,2}$

in dem wir jeden Punkt den Gleitvektor

der Strömung im Punkt x zuordnen.



Analog geben Kraftfelder in $D \subset \mathbb{R}^3$ Vektoren in $F_{D,3}$.

Beispiel:

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervall

$V = C^0[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$\langle f, g \rangle = f \cdot g = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$

$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f|^2\, dt \geq 0$

f stetig $\int_a^b |f(t)|^2\, dt = 0 \Rightarrow f = 0$

$\langle f, g \rangle_\varphi := \int_a^b f(t) g(t) \varphi(t)\, dt$; wobei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig > 0 eine Dichte.

Def und Folge:

Sei V ein Vektorraum $W \subset V$ eine Teilmenge mit

1) $0 \in W$

2) $v \in W \Rightarrow -v \in W$

3) $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in W \Rightarrow \lambda v \in W$

4) $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$

Dann bildet W selbst ein Vektorraum, ein sogenannter Untervektorraum von V.

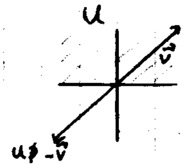
Beispiele:

a) $g = \{ \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade durch 0 mit Richtungsvektor v, dann ist g ein Untervektorraum in $\mathbb{R}^3$

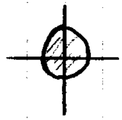
b) $E = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$ $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ Vektoren die in versch. Richtungen zeigen, also eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch 0 ist ein Untervektorraum.

c) $\mathbb{R}^2 \supset U = \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0 \}$

ist kein UVR von $\mathbb{R}^2$ da



$U = \{ x \binom{x_1}{x_2} \mid \|x_1\| \leq 1 \}$

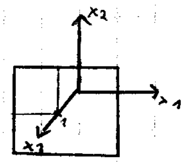


ist kein UVR, da

$2\binom{1}{0} = \binom{2}{0} \notin U$

d) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1 \right\}$ ist kein

UVR von $\mathbb{R}^3$ da $0 \notin E$



Allgemein Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^3$ sind UVR genau dann, wenn sie den Nullpunkt enthalten.

e) $U = \{ f \in F_{\mathbb{R},1} \mid f$ ist 2-mal diffbar und $f'' = -f \} \subset F_{\mathbb{R},1}$ ist ein UVR

$\sin(x), \cos(x) \in U$

Genauer gilt jedes $f \in U$ hat die Darstellung

$f(x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Die Funktionen $\sin(x), \cos(x)$ spielen für diesen Raum, die gleiche Rolle, wie $v_1, v_2 \in$

$E = \{ \lambda v_1, \mu v_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$.

Kapitel 15 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

In Kap 13 waren wir auf das lineare Gleichungssystem

$$1 + \lambda_1 + \mu_1 = 1 + \lambda_2 + \mu_2$$

$$1 + \mu_1 = 1 - \lambda_2 + \mu_2$$

$$-\lambda_1 + \mu_1 = 1 + 2\mu_2$$

gestoßen.

Wir bringen dieses Gleichungssystem in eine Standartform

$$\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 + \lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$-\lambda_1 + \mu_1 - 2\mu_2 = 1$$

Addition von I in III

$$\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 + \lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$2\mu_1 - \lambda_2 - 3\mu_2 = 1$$

III − 2II

$$\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2 = 0$$

$$-3\lambda_2 - \mu_2 = 1$$

Def.: Ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ ist ein Gleichungssystem der Gestalt

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Das Gleichungssystem heißt homogen, wenn $b_1, \dots, b_m = 0$

Die Koeffizienten a_{ij} schreibt man in eine Matrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Im Beispiel $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = (x_0 \cdot x_n)$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Die Rechnung wie oben bringt mit Zeilenumformung die Matrix in Zeilenstufenform.

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Die Menge der Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ wird mit

$M(m \times n, \mathbb{R})$ $(= \mathbb{R}^{m \times n})$ bezeichnet.

$M(m \times n, \mathbb{R})$ ist ein weiteres Beispiel für ein Vektorraum.

Def & Satz:

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $B \in M(n \times r, \mathbb{R})$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,r}}$

Dann ist das Matrizenprodukt $C = (c_{ik}) = A \cdot B$ durch

$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ definiert $\quad C \in M(m \times r, \mathbb{R})$

Für das Matrixprodukt gilt:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ für $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $B \in M(n \times r, \mathbb{R})$, $C \in M(r \times s, \mathbb{R})$

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B\,C$ für $A, B \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $C \in M(n \times r, \mathbb{R})$

$(B + C)A = A \cdot C + A \cdot B$ für $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $B, C \in M(n \times r, \mathbb{R})$

Für die $n \times n$ Einheitsmatrix

$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt $A \cdot E_n = A$ für $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$
$E_m A = A$

Für die 0-Matrix

$O_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$ gilt $O_{mn} \cdot B = O_{mr}$ $\quad B \in M(n \times r, \mathbb{R})$

$A \cdot O_{nr} = O_{mr}$ $\quad A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

Unser Gleichungssystem schreibt sich kürzer: 06.05.15

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \Rightarrow A \cdot x = b \text{ wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & \cancel{5} \\ \cancel{3} & \cancel{6} \end{pmatrix} \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$; $B = \begin{pmatrix} \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \\ \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{R})$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 47 & \cancel{52} & \cancel{57} \\ \cancel{64} & 71 & \cancel{78} \\ \cancel{81} & \cancel{90} & 99 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 50 & 122 \\ 68 & 167 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} =$ Skalarprodukt in der 1-ten Zeilenstruktur $(a_{11}, \dots, a_{1n})$ mit den ersten Spaltenvektor $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{n1} \end{pmatrix}$

$c_{ik} =$ i-te Zeile von A, j-te Spalte von B

Insbesondere

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Folgerung: Ein Vektor $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung des Gleichungssystems.

$$A \cdot x = b \qquad A \in M(m \times n, \mathbb{R}), \ b \in M(1 \times m, \mathbb{R})$$

wenn

$$A \cdot z = b$$

Bemerkung: Eine $m \times n$ Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ definiert eine lineare Abbildung

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto Ax$$

$L_A(x) := A \cdot x$

dabei heißt eine Abb. $f: V \to W$ zwischen Vektorräumen ~~linear~~ linear, falls:

$$f: (\lambda_1 v_1 \underset{\text{Addition mit } V}{\uparrow}{+} \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) \underset{\text{Add. mit } W}{\uparrow}{+} \lambda_2 (v_2)$$

$A(x+y) = Ax + Ay$

$A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $B \in M(n \times r, \mathbb{R})$

$$\mathbb{R}^r \xrightarrow{L_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^m \qquad \boxed{L_A \circ L_B = L_{AB}}$$

Das Assoziativgesetz für Matrixprodukt folgt aus der Assoziativität in Komposition von Abbildung