

Satz: (Struktur von Lösungen linearer Gleichungssysteme)

10.02.15

$A \in M(m \times n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m$ Wir betrachten das Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ und das zugehörige homogene System}$$

$$Ax = 0$$

Dann gilt:

1) Die Lösungsmenge

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n \text{ ist ein Untervektorraum}$$

2) Ist $\tilde{x}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, dann ist

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \{\tilde{x} + x' \mid x' \in L \text{ eine Lösung der homog. Gleichung ist}\}$$

Mit anderen Worten: Die Lösungsmenge ist entweder $\emptyset$ oder ein zu L paralleler Raum in $\mathbb{R}^n$

Beweis: $Ax = 0, Ax' = 0 \Rightarrow A(x+x') = 0$

$$\Rightarrow L \subset \mathbb{R}^n \text{ ist Untervektorraum}$$

$$x, x' \in L \Rightarrow x+x' \in L$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, x \in L \Rightarrow \lambda x \in L$$

$$\{0\} \subset L \subset \mathbb{R}^n$$

$\tilde{x}$ spezielle Lösung in $A\tilde{x} = b$ und $\hat{x}$ eine weitere Lösung

$$\Rightarrow A\tilde{x} - A\hat{x} = b - b = 0$$

$$A(\tilde{x} - \hat{x}) = 0 \Rightarrow -x' = \tilde{x} - \hat{x} \in L \text{ bzw. } \hat{x} = \tilde{x} + x' \text{ mit } x' \in L \quad \square$$

Gaußalgorithmus und Zeilenstufenform

Eine Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R}), A = (a_{ij})$ ist in Zeilenstufenform, mit r Stufen

wenn es r -Spaltenindizes $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r$, sodass $a_{ij} = 0$ für $j < j_i$

$$a_{ij} \neq 0$$

$$\text{mit } a_{kj} = 0 \quad \forall k > r$$

Def: Eine elementare Zeilenumformung einer Matrix A ist eine der folgenden Umformungen

1) Vertauschen zweier Zeilen.

2) Multiplikation einer Zeile mit Faktor $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

3) Addition einer Zeile zu einer anderen.

4) Addition einer Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Satz: Jede Matrix A lässt sich durch elementare Zeilenumformung in Zeilenstufenform bringen.

Bsp:
$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}-9\text{I}]{\text{II}-5\text{I}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \} r=2 \{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$$

Der Algorithmus funktioniert wie folgt:

1. Schritt: $a_{11} \neq 0$ so können A in Matrix

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \dots \\ 0 & \tilde{A} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) \text{ durch abziehen Vielfache der ersten Zeile in den anderen}$$

2. Schritt: Fahren mit der kleinen Matrix $\tilde{A}$ rekursiv fort.

3. Schritt: Ist $a_{11} = 0$ aber ein $a_{i1} \neq 0$, so vertauscht man die 1-te und i -te Zeile und fahren mit Schritt 1 fort.

4. Schritt: Sind alle $a_{i1} = 0$ also die 1. Spalte 0, dann hat A die Gestalt

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \tilde{A} \end{array} \right) \text{ Wir fahren mit der kleinen Matrix } \tilde{A} \text{ rekursiv fort.}$$

Da $n, m < \infty$ bricht das Verfahren mit einer Matrix in Zeilenstufenform ab.

Satz: (Lösen mit Gaußalgorithmus) $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat eine Lösung, genau dann, wenn A und die erweiterte Matrix $(A; b)$ den gleichen Rang haben.

Das homogene Gleichungssystem ist ein Untervektorraum der von $n-r$, $r = \text{rang } A$ Vektoren minimal aufgespannt wird.

Genauer, wir können die x_j mit $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ beliebig beliebigen Werten zugeben und dann das Gleichungssystem für $x_{j_r}, x_{j_r-1}, \dots, x_{j_1}$ rekursiv lösen.

Bsp:
$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } (A|b)$$

wählen $x_3 = t \quad -4x_2 - 8t = -12 \Leftrightarrow x_2 = 3 - 2t$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + 3t = 4 \Leftrightarrow x_1 = 3t - 2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-2 \\ 3-2t \\ t \end{pmatrix}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist eine Gerade}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 7-2t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow L = \emptyset$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x_3 = -1$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 + 2t + 3(-1) = 4$$

$$x_1 = 7 - 2t$$