Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Wintersemester 2014/2015
28.10.2014

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Blatt 1 (Abgabe: 04.11.2014)

Hinweise:
Pro Aufgabe können Sie maximal 4 Punkte erreichen. Geben Sie die bearbeiteten Übungsblätter bitte vor Beginn der Vorlesung in dem dafür bereitstehenden Kasten ab. Sollte Ihre Abgabe aus mehr als einem Blatt bestehen, verbinden Sie bitte die Blätter in geeigneter Weise (z.B. durch Tackern; Büroklammern sind ungeeignet). Sie dürfen in Gruppen mit bis zu drei Personen (auch übungsgruppenübergreifend) abgeben. Versehen Sie bitte Ihre Abgabe mit den Namen aller beteiligten Personen und der Nummer der Gruppe, in der die Abgabe nach erfolgter Korrektur an Sie zurück gegeben werden soll. Eine Angabe der Matrikelnummer ist nicht nötig.

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die folgenden Terme. Geben Sie in Teil (c) zusätzlich an, für welche Werte $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alle auftretenden Ausdrücke wohldefiniert sind, d.h. eine Division durch Null vermieden wird.

(a)
$$\sqrt{9x^4y^2} + 13y(x^2 - y^2) + (2y + 4x\sqrt{y})(2y - 4x\sqrt{y}) \quad \text{für } x, y \geq 0$$

(b)
$$(2u + 3v)^2 + (2u - 3v)^2 - 8u^2$$

(c)
$$\left(\frac{ab + b}{b}\right) : \left(\frac{ab - a}{a}\right)$$

Aufgabe 2

(a) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$f(x) = 1 + 3x + x^2 \ , \quad g(x) = x - 1 \ .$$

Berechnen Sie möglichst einfache Ausdrücke für

$$(f \circ g \circ g)(x) \ , \quad (g \circ f \circ g)(x).$$

(b) Seien $X := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und $Y := \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < \frac{1}{4}\}$. Die Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ seien durch

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2} \ , \quad g(y) = \sqrt{\frac{1 - 4y}{y}}$$

gegeben.

Rechnen Sie nach, dass g die Umkehrfunktion zu f ist, d.h. zeigen Sie insbesondere, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$ gilt.

Aufgabe 3

Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen der Elemente an:

$$M_1 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, a \cdot b = 210\right\}, \qquad M_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, a + b = 7\right\},$$

$$M_3 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, a + b = \tfrac{3}{2}\right\}, \qquad M_4 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, a + b < \tfrac{7}{2}\right\}.$$

Aufgabe 4

Wir betrachten die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 + x_1^4$$

und

$$g : [-1,1] \to \mathbb{R}^2; \quad g(t) = (t, t\sqrt{1-t^2}).$$

(a) Berechnen Sie für $t \in [-1,1]$ die Komposition $(f \circ g)(t) = f(g(t))$. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren (Diskussion in den Übungen)?

(b) Berechnen Sie den Gradienten

$$\text{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

im Punkt $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(c) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $v(t) := g'(t)$ im Punkt $t = \frac{1}{2}$.

(d) Für zwei Vektoren $w := (w_1, w_2)$ und $v := (v_1, v_2)$ definieren wir das Skalarprodukt zwischen w und v als

$$\langle w, v \rangle := w \cdot v := w_1 v_1 + w_2 v_2.$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen $w = (\text{grad} f)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ und $v = g'\left(\frac{1}{2}\right)$. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren (Diskussion in den Übungen)?