Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Wintersemester 2014/2015

25.11.2014

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Blatt 5 (Abgabe: 02.12.2014)

Aufgabe 1 Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

(a) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

(b) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

(c) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

(d) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Wieso gilt diese Formel nicht für alle $x \in \mathbb{R}$?

(b) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

(c) Bekanntlich gilt $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$ für alle $x \in [-1, 1]$. Gilt auch $\arccos\big(\cos(x)\big) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Beweisen Sie Ihre Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3 Führen Sie eine Kurvendiskussion (Nullstellen, Extrema, Wendestellen, Verhalten im Unendlichen) durch für die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \sin(x)\ e^{-x}$$

und fertigen Sie eine (grobe) Skizze des Graphen an.

Aufgabe 4 Verwenden Sie die Additionstheorem für Sinus und Cosinus, um zu zeigen, dass $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt. Hierbei dürfen Sie verwenden, dass $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ gilt. (Tipp: Verwenden Sie den Ansatz $\cos(3x) = \cos(2x + x)$, um $\cos(3x)$ letztendlich als Polynom in $\cos(x)$ zu schreiben.)