Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Wintersemester 2014/2015

02.12.2014

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Blatt 6 (Abgabe: 09.12.2014)

Aufgabe 1

Untersuchen Sie für die Funktion f und den Punkt x_0, ob f sich stetig in x_0 fortsetzen lässt und bestimmen sie ggf. den Wert in x_0 der stetigen Fortsetzung!

(a) $f(x) = \dfrac{(x^2-5x+6)(x^2-3x+2)}{x^2-4x+4}, \quad x_0 = 2$

(b) $f(x) = \dfrac{(x^2-x-2)(x^2-2x+1)}{x^2+2x+1}, \quad x_0 = -1$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x}, \quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x+\frac{\pi}{2}}, \quad x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

Aufgabe 2

Die Folge a_n sei gegeben durch

$$a_n = (-1)^n + \frac{5}{n}.$$

a) Finden sie zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ eine Zahl N, so dass für alle $n > N$ gilt

$$a_n \in \ ]-1-\epsilon, -1+\epsilon[\ \cup \ ]1-\epsilon, 1+\epsilon[.$$

b) Entscheiden sie (mit Begründung!), ob die Folge (a_n) konvergiert.

c) Entscheiden sie (mit Begründung!), ob die Folge $(|a_n|)$ konvergiert.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $g(x) = (f(x))^2$, $h(x) = (f(x))^3$. Zeigen Sie mit Hilfe der Produktregel (ohne die Kettenregel zu benutzen), dass

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) \qquad \text{und} \qquad h'(x) = 3g(x)f'(x)$$

gilt. Zeigen Sie mit der Quotientenregel, dass

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

gilt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen der Funktionen

$$f_1(x) = \frac{x\sin(x) + 2x^2}{\cos(x)}$$

und

$$f_2(x) = \frac{(1-x)^3}{2x^2 - x - 1}$$

gilt:

(a) $f_1'(x) = \dfrac{\sin(x) + x\cos(x) + 4x}{\cos(x)} + \dfrac{\left(x\sin(x) + 2x^2\right)\tan(x)}{\cos(x)}$

(b) $f_2'(x) = -2\,\dfrac{(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}$ (Tipp: $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$)