UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 14.01.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 10 — 7.01.2016

Aufgabe 1. Welche der folgenden Pfaffschen Formen besitzt ein Potential?

(1) $\omega_1 = xdx + ydy + zdz$ auf $\mathbb{R}^3$
(2) $\omega_2 = ydx + zdy + xdz$ auf $\mathbb{R}^3$
(3) $\omega_3 = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dy}{y}$ auf $\mathbb{R}^3_{>0}$

Bestimmen Sie für $i = 1, 2, 3$ das Integral $\int_\gamma \omega_i$ für den Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (1,1,1) + t \cdot (1,1,1).$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie für

$$\omega_1 = xdx + ydy + zdz$$
$$\omega_2 = ydx + zdy + xdz$$

den Rückzug $\alpha^*\omega_i$ entlang

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta).$$

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg, $v : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U und $\omega = \sum_{i=1}^n v_i dx_i$. Beweisen Sie

$$\left| \int_\gamma \omega \right| \leq L(\gamma) \cdot \sup_{x \in \mathrm{Bild}(\gamma)} \{||v(x)||\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Bogenlänge des Weges γ bezeichnet.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\gamma : [0,1] \to U$ ein 2-mal stetig differenzierbarer Weg, welcher für das Vektorfeld $v = -\mathrm{grad}(f)$ die Bedingung

$$\gamma''(t) = v(\gamma(t))$$

für alle $t \in [0,1]$ erfüllt. Beweisen Sie, dass für $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ gilt:

$$\frac{1}{2}\big(\langle\gamma'(t_2), \gamma'(t_2)\rangle - \langle\gamma'(t_1), \gamma'(t_1)\rangle\big) = f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1))$$

Folgern Sie, dass die die Summe der kinetischen und potentiellen Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}||\gamma'(t)||^2 - f(\gamma(t))$$

konstant ist.