UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 29.10.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 1 22.10.2015

Aufgabe 1. Sei $C \subset \mathbb{R}^3$ das Bild einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele Quader $Q_1, \dots, Q_N$ existieren, sodass $C \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$ und $\sum_{i=1}^N v(Q_i) < \varepsilon$.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K existiert mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f nimmt auf $\mathbb{R}^n$ ihr globales Maximum <u>oder</u> Minimum an.
(b) Die Funktion f ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3. Seien $A_i \subset \mathbb{R}^n$ mit $i \in I$ eine Familie von Teilmengen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(1) A_i abgeschlossen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.
(2) A_i abgeschlossen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.
(3) A_i offen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ offen.
(4) A_i offen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ offen.
(5) A_i kompakt $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ kompakt.
(6) A_i kompakt $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ kompakt.

Aufgabe 4. Für ein Intervall $[a,b]$ und $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ setzen wir

$$\frac{[a,b]}{c} := \left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right] \quad \text{und} \quad c + [a,b] := [a+c, b+c]$$

Mit dieser Notation sei

$$C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3}\right) \quad \text{mit} \quad C_0 := [0,1]$$

rekursiv definiert.
Zeigen Sie, dass die Cantormenge $C := \bigcap_{n=0}^\infty C_n$ überabzählbar ist.
<u>**Hinweis:**</u> Betrachte die *3-adische Entwicklung* von Zahlen in C, d.h. man stellt $x \in [0,1]$ als $x = \sum_{i=1}^\infty \frac{x_i}{3^i}$ mit $x_i \in \{0,1,2\}$ dar.