UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 05.11.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 2 — 29.10.2015

Aufgabe 1. Sei $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ die charakteristische Funktion der Menge $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subset\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht Riemann-integrierbar.
(b) Die Funktion $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 2. Sei C die Cantormenge (vgl. Blatt 1, Aufgabe 4) und 1_C die charakteristische Funktion der Cantormenge. Zeigen Sie, dass 1_C Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie das Volumen von C.

Aufgabe 3. (a) Seien $A\subset\mathbb{R}^n$ und $B\subset\mathbb{R}^m$ kompakte (bzw. abgeschlossene, offene) Teilmengen. Zeigen Sie, dass $A\times B\subset\mathbb{R}^{n+m}$ kompakt (bzw. abgeschlossen, offen) ist. Zeigen Sie ferner, dass $v(A\times B)=v(A)\cdot v(B)$ ist, falls A und B kompakt sind.
(b) Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass eine Folge von Bällen $\big(B_{r_k}(a_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}\subset U$ existiert, so dass $U=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{r_k}(a_k)$.

Aufgabe 4. (a) Für $\sigma\in\mathbb{R}_{>0}$ sei $f_\sigma(x):=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$. Berechnen Sie die obere Einhüllende zu der Menge $\mathcal{G}:=\{f_\sigma\mid\sigma\in\mathbb{R}_{>0}\}$.
(b) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare konvexe Funktion. Für $c\in[a,b]$ sei $\ell_c:[a,b]\to\mathbb{R}$ die lineare Funktion, die die Tangente von f im Punkt c beschreibt. Zeigen Sie, dass die obere Einhüllende zu der Menge $\mathcal{L}:=\{\ell_c\mid c\in[a,b]\}$ gleich der Funktion f ist.