UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 12.11.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 3 05.11.2015

Aufgabe 1. Sei X eine Menge und sei 2^X die Potenzmenge von X. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset 2^X$ heißt *Algebra* (von Mengen), falls sie die folgenden Eigenschaften hat

(i) $X \in \mathcal{A}$.
(ii) Falls $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
(ii) Gilt $A, B \in \mathcal{A}$, so ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ endlich oder } X \setminus A \text{ endlich}\}$ ist eine Algebra.
(b) Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, so gehört die *symmetrische Differenz*
$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
zweier Elemente $A, B \in \mathcal{A}$ ebenfalls zu $\mathcal{A}$.

Aufgabe 2. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{B} \subset 2^X$. Zeigen Sie, dass
$$\bigcap_{\mathcal{A} \supset \mathcal{B},\ \mathcal{A} \subset 2^X \ \text{Algebra}} \mathcal{A}$$
eine Algebra ist (die von $\mathcal{B}$ erzeugte Algebra).

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Zeigen Sie, dass $f(N)$ ebenfalls eine Nullmenge ist. Gilt dies auch für $f^{-1}(N)$?

Aufgabe 4. (a) Wir definieren eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch
$$f_n : (0,4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{falls } x \geq \frac{1}{n} \\ \sqrt{n} & \text{falls } x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : (0,4] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie ferner, dass f Lebesgue-integrierbar ist und bestimmen Sie $\int_{(0,4]} f dx$

(b) Sei f eine Funktion auf $A \subset \mathbb{R}^n$ und (A_k) eine Ausschöpfung von A derart, dass f über jedes A_k integrierbar ist. Zeigen Sie, dass f genau dann über A integrierbar ist, wenn die Folge der Integrale $\int_{A_k} |f| dx$ beschränkt ist. Zeigen Sie ferner, dass in diesem Fall gilt:
$$\int_A f dx = \lim_{k \to \infty} \int_{A_k} f dx$$