UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 19.11.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 4 — 12.11.2015

Aufgabe 1. (a) Sei X eine Menge und sei $\mathcal{E} \subset 2^X$. Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{\mathcal{A} \supset \mathcal{E},\ \mathcal{A}\ \sigma-\text{Algebra}} \mathcal{A}$$

eine σ-Algebra ist. $\mathcal{E}$ heißt Erzeugendensystem dieser σ-Algebra.

(b) Sei X eine Menge und $(Y, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie, dass es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X gibt, so dass eine Abbildung $f : X \to Y$ messbar wird. Sei $X \subset Y$ und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}|_X := \{E \cap X \mid E \in \mathcal{E}\}$ die kleinste σ-Algebra erzeugt bzgl. der die Inklusionsabbildung $X \hookrightarrow Y$ messbar ist.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},\ A \mapsto |A|$ (:= Anzahl der Elemente in A) ein Maß definiert, das sogenannte *Zählmaß*.

(b) Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $p_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, sodass $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Zeigen Sie, dass durch $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1],\quad A \mapsto \sum_{k\in A} p_k$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$ definiert wird.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und sei $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ eine Funktion mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie für $A, B \in \mathcal{M}$:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,
(b) Ist $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$,
(c) Ist $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$, so gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass jede σ-Algebra entweder endlich viele oder überabzählbar viele Elemente enthält.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine abzählbar unendliche σ-Algebra $\mathcal{A} \subset 2^X$ gibt und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch, indem Sie eine injektive Abbildung $\varphi : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}$ konstruieren. Betrachten Sie dazu die Mengen

$$M_x := \bigcap_{B\in\mathcal{A} \text{ mit } x\in B} B \qquad \text{mit } x \in X$$

und zeigen Sie:

- $M_x \cap M_y \neq \emptyset$ für $x, y \in X \ \Rightarrow\ M_x = M_y$
- Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $A = \bigcup_{x\in A} M_x$