UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 03.12.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 6 — 26.11.2015

Aufgabe 1 (Fortsetzung Blatt 5 Aufgabe 1)**.** Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mu : 2^X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß und

$$\mathcal{M} := \{B \subset X \mid \mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) \text{ für alle } A \subset X\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist und $\mu|_{\mathcal{M}}$ ein Maß auf $\mathcal{M}$ definiert.

Aufgabe 2. (a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_{[-n,n]} f dx = 0$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \int_{[0,1]} \sqrt{x} e^{-n^2x^2} dx = 0$$

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Sind $f_k : X \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen bzgl. der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

für alle $x \in X$, so ist f messbar.

Aufgabe 4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar bzgl. der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$f_*\mu : \mathcal{B}(R) \to [0,1], f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

ein Maß auf $\mathbb{R}$ definiert, welches eindeutig durch die Wahrscheinlichkeiten $\mu(f \leq b) := \mu(f^{-1}(]-\infty, b])$ mit $b \in \mathbb{R}$ definiert ist.