

## 8. Nullmengen zur Dimension of

### 8.1. Motivation

Im 7. Kapitel hatten wir gesehen, dass wir stetige Fkt über komp. MM int. können. Wir können aber noch nicht über den Rand des Würfels int, da wir nicht wissen wie wir sie behandeln sollen.  
Korrekt: Einfach ignorieren. Warum?

### 8.2 Definition

Se.  $\alpha > 0$ . Eine  $ACR^n$  heißt Hausdorff-Nm zur dim  $\alpha$  kurz  $\alpha$ -Nm, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  abz. viele Würfel  $W_i$  gibt mit Kantenlängen  $r_i$ , sd.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\alpha} < \varepsilon.$$

### 8.3. Bemerkung

1) Jede Nm zur dim  $\alpha$  ist auch Nm zur dim  $\alpha' > \alpha$ . Dann ist  $0 < \varepsilon < 1$  vorg. und

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\alpha} < \varepsilon < 1$$

so folgt  $0 < r_i < 1$ , also

$$r_i^{\alpha'} \leq r_i^{\alpha} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\alpha'} \leq \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\alpha} < \varepsilon. \quad \square$$

Für  $ACR^n$  heißt

$$\inf \{ \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid A \text{ ist } \alpha\text{-Nm} \}$$

die Hausdorff Dimension von  $A$ .

Es gibt  $ACR^n$  mit nicht ganzzahliger Hd. dim.

2)  $\alpha$ -Nm zu  $\alpha = n$  sind  $L$ -Nm.

3) Eine Gerade  $L \subset \mathbb{R}^n$  ist eine 1-Nm, aber keine 0-Nm (Hd-Dim = 1)

4) Analog wie für  $L$ -Nm gilt:

(i)  $\forall B \subset \alpha$ -Nm:  $B$  ist  $\alpha$ -Nm

(ii)  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  ist  $\alpha$ -Nm mit  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Ferner haben wir analog zu Lemma 6.7

### 8.4 Lemma

Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine  $\alpha$ -Nm und  $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Lipschitzstetige Abbildung, dann ist auch  $\Phi(A) \subset \mathbb{R}^m$  eine  $\alpha$ -Nm. Insbesondere sind die Bilder von  $\alpha$ -Nm  $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U$  offen, unter einer stetigen Abb.  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  wieder  $\alpha$ -Nm.  $\square$

### 8.5 Folgerung

1) Jede  $(\alpha-1)$ -dim UM des  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $\alpha$ -Nm.

Beweis: Da UM sich durch abz. viele Kartengebiete überdecken lassen, genügt es den Fall zu betrachten, dass  $M$  sich durch eine einzige Karte param. lässt (Karte =  $\varphi: V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{\alpha-1}$ ,  $\varphi$  diff'bar). Dann ist  $V \times \{0\} \subset V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^\alpha$  eine  $\alpha$ -Nm. und  $\Phi: (V \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi(v, t) = \varphi(v)$  stetig diff'bar. Nach 8.4 ist  $\Phi(V \times \{0\}) = \varphi(V) = M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $\alpha$ -Nm.  $\square$

2) Sei  $A \subset M$  eine Tm einer  $\alpha$ -dim UM  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

$A$  ist  $\alpha$ -Nm, wenn für jede Karte  $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{\alpha-1}$  Kartengebiet,  $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^{\alpha-1}$  eine  $\alpha$ -Nm ist.

Beweis: [Da  $M$  sich durch abz. viele Kartengebiete überdecken lässt, betrachten wir den Fall, dass sich  $M$  durch eine einzige Umkehrabb.] Nein!

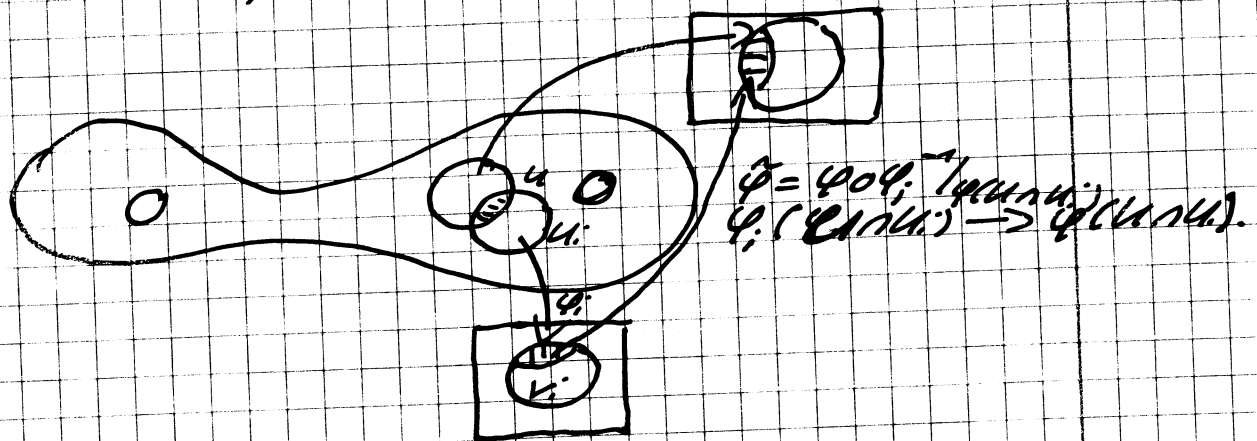
Notwendigkeit der Bedingung: Mit Hilfe des Satzes über implizite Fkt hatten wir gezeigt, dass es einen Atlas aus Karten

$$\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^{\alpha-1}$$

gibt, wobei  $\varphi_i$  auf  $U_i \subset M \subset \mathbb{R}^n$  eine Projektion auf geeignete  $\alpha$ -Koord. ist. Für so eine Karte ist

$\varphi_i(A_i \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$  das Bild einer stetig diffbaren Abb.  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Also in  $\varphi(A_i \cap U_i)$  natw. eine  $\alpha$ -Nm.  
 Für andere Karten  $\varphi: U \rightarrow V$  lässt sich  $\varphi(U \cap A)$  als abg. Vereinigung von Bildern  $\varphi(U_i \cap U \cap A)$  unter der Kartenabb. <sup>Wechsel</sup>  $\bigcup V_i$  erhalten.

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U) \rightarrow \varphi(U \cap U_i) \subset V$$



$\varphi_i$  spezielle Karten wie oben. Also alle  $\varphi(U \cap A)$  sind  $\alpha$ -Nm. Für hinreichend reicht es die Voraussetzung für Karten  $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$  in einem Atlas voraussetzen  $\{ (U_i, \varphi_i) \}$  Atlas:  $\hookrightarrow$

$\bigcup U_i = M$  und  $(U_i, \varphi_i)$  Karten.

$A$  ist die Vereinigung von den Bildern  $\varphi_i(A \cap U_i)$

$\subset V_i \subset \mathbb{R}^d$  unter der Param.:

$$\varphi_i^{-1}: V_i \rightarrow U_i \subset U \subset \mathbb{R}^n. \square$$

### 8.6. Folgerung

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine UM der dim  $d$ .  $F, \tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  zwei Fkt, die außerhalb einer  $\alpha$ -Nm  $A \subset M$  übereinstimmen.  $F$  ist über  $M$  intbar  $\Leftrightarrow \tilde{F}$  ist über  $M$  intbar.

### 8.8. Folgerung

Ist  $M$  eine  $\alpha$ -UM und  $A \subset M$  abg.  $\alpha$ -Nm, so gilt

Für jede über  $M$  intbare Fkt,  $F: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$

$$\int_M F dx = \int_{M \setminus A} F dx.$$

Bemerkung: Da  $A \subset M$  abg., ist  $M \setminus A$  eine UM, also RS erklärt.

### 8.8. Beispiel

Sind  $U_1, \dots, U_N \subset M$  UM, d.-dim. d.h.: Kartengebiet und  $M = \bigcup_{i=1}^N U_i$  eine d.-NM, dann gilt:

$$\int_M F ds = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} F ds.$$

Die Oberfläche der Kugel wurde in Bsp. 7.8 korrekt berechnet.

### 8.9. Definition

$X \subset \mathbb{R}^n$  heißt d.-dim. fest überall diffbare MFlk (Fläche), wenn es eine nicht-leere Mkt  $X$  gibt, s.d.

- 1)  $M$  ist d.-UM.
- 2)  $S = X \setminus M$  ist d.-NM.
- 3)  $M$  dicht in  $X$  und offen.

Eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt über  $X$  integ., wenn  $f|_M$  integ. ist und

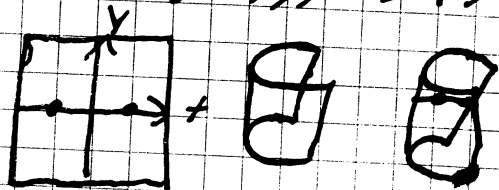
$$\int_X f ds := \int_M f ds.$$

Beispiel:  $\mathcal{E}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = xy^2$  der Whitney

Umbrella.

$S = \mathcal{E}(x, y, z) / y = z = 0$   $x$ -Achse  
 $X \setminus S = M = \{*$  ist 2-MFlk. aber  $M$  liegt nicht  
 $x$  dicht in  $X$ .

$t = \frac{z}{y}$ ,  $t^2 = x$ ,  $z = ty$   
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, y) \mapsto (t^2, y, ty)$



## 9. Der Gaußsche Integralsatz

### 9.1 Definition

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein Kompaktum. Ein  $f_0 \in \mathcal{C}(K)$  heißt

regulärer Randpunkt, wenn es eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  gibt und eine reguläre Fkt.  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x_0) = 0$  sd.

$$K \cap U = \{x \in U \mid h(x) \geq 0\}$$

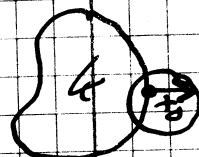
Dann ist der Rand

$$\partial K \cap U = \{x \in U \mid h(x) = 0\}$$

Für  $x \in \partial K \cap U$  heißt

$$\nu(x) = \frac{\text{grad } h(x)}{\|\text{grad } h(x)\|}$$

der äußere norm. Normalenvektor an  $\partial K$ .



### 3.2 Bemerkung

1) Da  $h$  regulär ist ( $\text{grad } h(x) \neq 0 \forall x \in U$ ) ist die Menge  $\{x \in U \mid h(x) = 0\} \subset U \subset \mathbb{R}^n$  nach dem Satz über imp. Fkt. eine  $(n-1)$ -dim. LM. Für  $a \in U$  mit  $h(a) = 0$  gibt die Taylorentwicklung

$$h(x) = \langle \text{grad } h(a), x - a \rangle + R(x)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{\|x - a\|} = 0$$

also  $h(x)$  für  $x = a + t \text{grad } h(a)$  für  $0 < t \ll 1$  positiv und  $a + t \text{grad } h(a)$  für  $-1 \ll t < 0$  negativ ist. Es gilt also in der Tat  $\partial K \cap U = \{x \in U \mid h(x) = 0\}$ .

2) Der Normalenvektor  $\nu(x)$  ist durch die Eigenschaften

$$1) \nu(x) \perp T_x \partial K$$

2)  $\nu(x)$  ist norm. und zeigt nach außen unv. bestimmt.



