

3.17 Satz

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge, genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Quader (Q_k) gibt, sodass

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(Q_k) < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Beweis: a) Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ solche Quader, so folgt wegen $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$

$$1_M \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$$

und daher

$$\|1_M\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(Q_k) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ also}$$

$$\|1_M\|_1 = 0 \Rightarrow M \text{ ist eine Nullmenge.}$$

b) Umgekehrt sei M eine Nullmenge. Zu $\varepsilon > 0$ konstruieren wir die Quader Q_k in zwei Schritten.

1) Konstruieren eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset U$ und $v(U) < \varepsilon$

2) Ausschöpfung von U durch geeignete Quader.

Zu 1) M Nullmenge $\Leftrightarrow \|1_M\|_1 = 0$. Da $\|2 \cdot 1_M\|_1 = 0$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Hilfsreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ für 1_M , deren Inhalt $< \varepsilon$ ist.

Die Folge $\varphi_m = \sum_{k=1}^m c_k 1_{Q_k}$ ist dann eine monoton wachsende Folge von Treppenf., deren Integrale

$$\int \varphi_m dx = \sum_{k=1}^m c_k \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$$

beschränkt bleiben. Nach dem Satz von Beppo-Levi ist somit

$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x)$ eine integrierbare Fkt. mit

$$\int F(x) dx < \varepsilon$$

Die gesuchte Menge U ist

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > 1\}$$

Nach Wahl der Hilfsreihe gilt $M \subset U$. U ist offen. In der

Definition der Hüllreihe sind nämlich sämtliche Quader R_k offene Quader. Ist $x_0 \in U$, so existiert ein m , so

$$\varphi_m(x_0) = \sum_{k=1}^m c_k \cdot 1_{R_k}(x_0) > 1.$$

Wir betrachten jetzt

$x_0 \in \bigcap_{k=1}^m R_k = V$ als Durchschnitt endlich vieler offener Quader.

$$F(x) \geq \varphi_m(x) = \sum_{k=1}^m c_k \cdot 1_{R_k}(x) \geq \sum_{k=1}^m c_k \cdot 1_{R_k}(x_0), \text{ mit } x_0 \in R_k, c_k \geq 0.$$

$\Rightarrow$ Diese Ungleichung folgt, für alle $x \in V$, dass $x_0 \in V \cap U$.

Da x_0 beliebig war, ist U offen.

Für das Volumen gilt:

$$v(U) = \int 1_U dx \leq \int F(x) dx < \varepsilon.$$

Zu 2): Ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = U$ eine Ausschöpfung von U durch

Figuren

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} Q_i$$



Disjunktheit
 $\Rightarrow$ nötig für
Abschätzung

so können wir durch Verfeinern der Quader erreichen,

dass Q_i und Q_j für $i \neq j$ sich nur in ausgearteten

Quadern schneiden: Es genügt jeweils

$$A_{k+1} \setminus A_k = Q_{n_k+1} \cup \dots \cup Q_{n_{k+1}}$$

geeignet zu wählen. Die Q_k haben die gewünschte Eigenschaft.

$$N(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

$$v(A_k) = \sum_{i=1}^{n_k} v(Q_i) \leq v(U) < \varepsilon$$

Für jedes k , also

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \leq v(U) < \varepsilon. \quad \square$$

4. Konvergenzsätze

4.1 Definition

Eine Folge $\varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ von Fkt heißt L^1 -konvergent

gegen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, wenn

$$\|F - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Hausdorff-
Dimension

Mandel-
brot

Fraktal-
Räume

4.2. Bemerkung

Der L^1 -GW ist nicht eindeutig bestimmt:

Ist $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion die sich von f nur in Nullmenge N unterscheidet, so gibt die Δ -Ungl.:

$$\| \tilde{f} - P_k \|_1 \leq \| \tilde{f} - f \|_1 + \| f - P_k \|_1 = \| f - P_k \|_1 \leq \| \tilde{f} - P_k \|_1,$$

also ist auch $\tilde{f}$ ein L^1 -GW.

4.3. Definition

Eine Folge (f_k) von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ heißt L^1 -C.F., wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$, sol. $\| f_k - f \|_1 < \varepsilon \forall k, k \geq n_0$.

L^1 -konvergente sind L^1 -C.F. Umgekehrt gilt

4.4. Satz (Vollst. von Fischer - Riesz)

Jede L^1 -C.F. (f_k) hat einen L^1 -GW $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ von integrieren Fkt.
Für diesen gilt:

$$\int f dx = \lim \int f_k dx$$

Ferner besitzt die Folge (f_k) eine Teilfolge, die fast überall gegen f punktweise konv.

Beweis: Wir wählen Indizes $k_1 < k_2 < \dots$, sodass

$$\| f_k - f_{k_0} \|_1 < 2^{-k} \quad \forall k \geq k_0 \text{ gilt.}$$

Die Teilfolge (f_{k_0}) erfüllt dann

$$\sum_{v=1}^{\infty} \| f_{k_{v+1}} - f_{k_v} \|_1 \leq 1.$$

Setzen $g_v = f_{k_{v+1}} - f_{k_v}$ und $g = \sum_{v=1}^{\infty} |g_v|$.

Mit der verallg. Δ -Ungl. gilt $\| g \|_1 \leq 1$. Nach 3. (2.1.1) ist g fast überall endlich, d.h. $\exists N \subset \mathbb{R}^n$, sol.

$$\sum g_v(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$$

absolut konvergiert. Sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k_0}(x) = f_{k_0}(x) + \sum_{v=1}^{\infty} g_v(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

F ist der gesuchte GW:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert p , sodass

$$\sum_{v=p}^{\infty} \|g_v\|_1 < \varepsilon \text{ und } \|f_k - f_{k_0}\|_1 < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Ist nun φ eine Treppenfkt. mit

$$\|f_{k_0} - \varphi\|_1 < \varepsilon$$

und es folgt

$$\|F - \varphi\|_1 \leq \|F - f_{k_0}\|_1 + \|f_{k_0} - \varphi\|_1 < 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ beliebig liefert: F ist integrierbar.

Ferner

$$\|F - f_k\|_1 \leq \|F - f_{k_0}\|_1 + \|f_{k_0} - f_k\|_1 < 2\varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

d.h. F ist ein L^1 -GW der (f_k) . Schließlich

$$|\int f dx - \int f_k dx| \leq \int |F - f_k| dx = \|F - f_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx. \quad \square$$

4.5. Bemerkung

Im Satz von F-R kann man auf den Übergang zu einer Teilfolge für die punktweise Konvergenz nicht verzichten:

Beispiel: (Wandernder Buckel)

Zu $k \in \mathbb{N}$ seien $v, q \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, dass

$$k = 2^v + q \text{ und } 0 \leq q < 2^v$$

$$\text{Dann sei: } I_k := [q \cdot 2^v; (q+1)2^v]$$

Die Folge $f_k = 1_{I_k}$ ist eine L^1 -Nullfolge, da $\|f_k\|_1 = 2^v \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Ein L^1 -GW ist dann $F \equiv 0$. Da

$$I_{2^0} \cup I_{2^0+1} \cup \dots \cup I_{2^{v+1}-1} = [0; 1]$$

konv. die Folge (f_k) auf $\mathbb{R}$ nirgends pw. ggü. 0.

4.6. Korollar

Jede Integrierbare Fkt F auf $\mathbb{R}^n$ ist L^1 -GW und eine Folge (f_k) von Treppfkt. mit

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \| \varphi_{k+1} - \varphi_k \|_1 < \infty$$

2) (φ_k) konv. fast überall ggü. f .

Beweis: Es sei (φ_k) eine Folge von Trpfkt mit

$$\| f - \varphi_k \|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Nach dem Beweis des Satzes gibt es eine Teilfolge

$\varphi_{k_j} = \varphi_{k_j}$ mit 1), die fast überall ggü einem L^1 -GW $\tilde{f}$ pw. konv. Die L^1 -GW sind $(f, \tilde{f})$ erfüllen:

$$\| f - \tilde{f} \|_1 = 0 = \int |f - \tilde{f}| dx$$

Also sind f und $\tilde{f}$ fast überall gleich. $\square$

4.7. Definition

$\|\cdot\|_1$ ist keine Norm auf

$$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ integrierbar} \}$$

Bilde $\mathcal{D}^1/N$ mit $N := \{ f \mid \|f\|_1 = 0 \}$

$\Rightarrow (\mathcal{D}^1/N, \|\cdot\|_1)$ ist norm. Raum, sogar Banach.

L^1 ist vollst.

4.8. Satz (Beppo - Levi)

Sei (f_k) eine mw. Folge integrierbarer Fkt. auf $\mathbb{R}^n$, so dass die Folge $\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx$ beschränkt ist. Dann ist die pw. gebildete GW-Fkt $f = \lim f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ integrierbar und es gilt:

$$\int f dx = \int \lim_k f_k dx = \lim_k \int f_k dx.$$

