

9.3 Definition:

Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt mit fast überall stetig diff'barem Rand, wenn eine $(n-1) \times N$ im $N \subset \mathcal{S}(K)$ existiert, sodass

- 1) $M = \mathcal{S}(K) \setminus N$ aus regulären Randpunkten besteht
- 2) $\mathcal{S}(K) \setminus N$ ist dicht in $\mathcal{S}(K)$.

Hat man darüber hinaus

- 3) $M = \mathcal{S}(K) \setminus N$ hat endliches Vol.

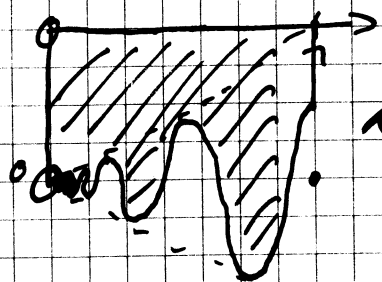
$$V_{n-1}(M) = \int_{\mathcal{S}(K)} 1 \, d\mathcal{S} = \int_M 1 \, d\mathcal{S} < \infty$$

so sprechen wir von einem Kompaktum mit fast überall glatten und messbarem Rand.

9.4. Bemerkung

- 1) Die endl. Messbarkeit von M ist nicht automat.

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \leq y \leq 1\}$$



hat keinen endl. messbaren Rand.

- 2) $\mathcal{S}_m K := \{x \in \mathcal{S}(K) \mid x \text{ ist reg. R.P. von } M\}$ heißt regulärer Rand

$$\mathcal{S}_s(K) = \mathcal{S}(K) \setminus \mathcal{S}_m(K) \subset N \text{ heißt sing. Rand.}$$

- 3) Ist $\mathcal{S}_s(K) = \emptyset$ so spricht man von einem Kompaktum mit glatten Rand. In diesem Fall ist $\mathcal{S}_m(K)$ eine $(n-1)$ dim UMM von $\mathbb{R}^n$.

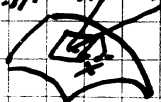
9.5: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ dim UMM und $v: M \rightarrow \mathbb{R}$ ein norm. Vektorfeld, d.h. $v(x) \in (T_x M)^\perp$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $M \subset U$ und

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges VF. (welches als ein von Zeit abh. Geschw. VF. einer Strömung interpretiert wird.) Dann lässt sich

$$\int_M \langle F(x), v(x) \rangle dx$$

als Gesamtmenge der durch M über einen Zeitraum fließenden Flüssigkeit interpretieren.

$$\langle F(x), v(x) \rangle = \cos(\alpha) \cdot \|F(x)\| \cdot \|v(x)\|$$


9.6. Satz (Gaußsche Int. Formel)

Sei K ein Kompaktum mit fast überall glattem, messbarem Rand.

$$v: \partial M(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

das äußere Normalen VF. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \supset K$ und $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'bares VF. Dann gilt:

$$\int_K \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial(K)} \langle F(x), v(x) \rangle dx$$

Dabei ist $\operatorname{div}(F): U \rightarrow \mathbb{R}$ die Fkt:

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

d.h. Divergenz des VF.

9.7. Korollar

Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'bares VF auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Zu $x \in U$ bezeichne $W_r(x)$ den Würfel mit Kl. r und MP x . Dann gilt:

$$\operatorname{div}(F(x)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V_n(W_r(x))} \int_{\partial(W_r(x))} \langle F(x), v(x) \rangle dx$$

Bew.: Da $\operatorname{div}(F)$ stetig ist $\exists$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$ sd.

$$|\operatorname{div}(F(y)) - \operatorname{div}(F(x))| < \varepsilon \quad \forall y \in W_r(x)$$

Es gilt dann:

$$\left| \int_{\partial(W_r(x))} \operatorname{div}(F(x)) dx - \operatorname{div}(F(x)) V_n(W_r(x)) \right| < \varepsilon$$

Andererseits gilt nach dem G. Intsatz

$$\int_{W_r} \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial W_r} \langle F(y), \nu(y) \rangle ds$$

Also

$$\frac{1}{V_n(W_r)} \int_{\partial W_r(x)} \langle F, \nu \rangle ds - \operatorname{div}(F(x)) < \varepsilon \quad \square$$

9.8. Bemerkung

Ein Punkt $x \in U$ mit $\operatorname{div}(F(x)) > 0$ nennt man eine Quelle, Punkte $x \in U$ mit $\operatorname{div}(F(x)) < 0$ Senke. In einer Quelle fließt durch kleine Würfel $W_r(x)$ mehr heraus als herein.

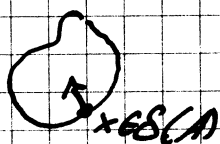
Ein VF F mit $\operatorname{div}(F) = 0$ heißt Quellen- und Senkenfrei. Für so ein VF gilt:

$$0 = \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x) \rangle ds$$

Also in jedes Kompaktum fließt genauso viel rein wie raus. K mit fast überall glatt, messb., Rand.

9.9. Beispiel (Archimedisches Prinzip)

Ein fester Körper A mit fast überall glatt, messb. Rand befindet sich in einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte $c > 0$ deren Oberfläche mit der Ebene $x_3 = 0$ übereinstimmt



In einem Punkt $x \in \partial(A)$ übt die Flüssigkeit auf A einen Druck aus der Größe

$$c x_3 \nu(x)$$

wobei der Vektor nach Innen zeigt, da $x_3 < 0$.

Für die Gesamtauftriebskraft $K = (K_1, K_2, K_3)$ die auf A wirkt, gilt:

$$K = \int_{\partial A} c x_3 \nu(x) ds$$

d.h.

$$K_i = \int_{\partial A} c x_3 \nu_i(x) ds.$$

Mit dem G. Int. Satz angewendet auf das VF

$$F(x) = (0, x_3, 0) = x_3 e_i$$

ergibt sich

$$K_i = \int_{\partial A} c x_3 \nu_i(x) ds = \int_A c \frac{\partial x_3}{\partial x_i} dx.$$

Also $K_1 = K_2 = 0$ und

$$K_3 = \int_A c dx^3 = c \cdot \text{Vol}(A) > 0$$

Der Körper erfährt einen Auftrieb $K = (0, 0, K_3)$

der prop. zur Masse einer verdrängten Flüssigkeit. $\square$

Beweis (Goursat):

9.10 Satz

Sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig diffbare Fkt. mit komp. Träger. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx = 0$$

Inbes gilt für stetig diffbare VF: $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Komp. Träger

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{div}(F) dx = 0$$

Beweis: Die letzte Formel ist ein spez. Fall von G. Int., denn wir können Quader Q finden, die Träger von F umfassen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{div}(F) dx = \int_Q \text{div}(F) dx = \int_{\partial Q} \langle F, \nu \rangle ds$$

da $F|_{\partial Q} = 0$. Da wir den Satz im Beweis verwenden wollen, brauchen wir einen unabh. Beweis. Nach unnummerieren können ich annehmen.

Dann gilt nach Fubini und dem HS:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F}{\partial x_n} dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, x_n) dx_n \right) dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [F(x', b) - F(x', a)] dx' \end{aligned}$$

wobei $a < 0 < b$ gewählt sind, dass der Träger von F in $\mathbb{R}^{n-1} \times]a, b[$ liegt. Also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F}{\partial x_n} dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (0-0) dx' = 0$$

9.11. Lemma

Sei $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I =]a, b[$, $g: U' \rightarrow I \subset \mathbb{R}$

eine stetig diffbare Fkt. Sei

$$A = \{ (x', x_n) \in U' \times I \mid x_n \leq g(x') \}$$

und

$$M = \{ (x', x_n) \in U' \times I \mid x_n = g(x') \}$$

Es seien

$$1) \quad v_i(x) = - (1 + \|\text{grad}(g(x'))\|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (i=1, \dots, n-1)$$

und

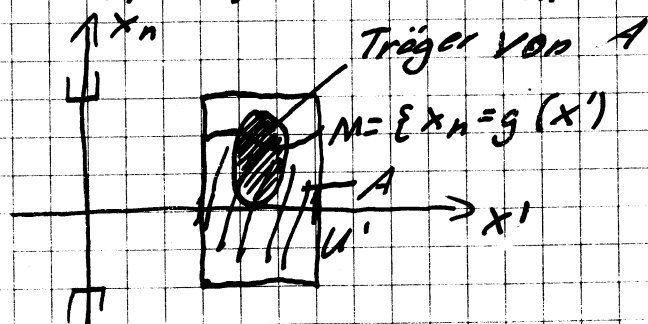
$$2) \quad v_n(x) = (1 + \|\text{grad}(g(x'))\|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

die Komp. der norm. äußeren N.v. von A entlang

M . Dann gilt für jede stetig diffbare Funktion

$F: U' \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit Komp. Träger in $U' \times I$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x_i} dx = \int F(x) v_i(x) dx \quad v_i$$



9.12 Bemerkung

1) Mit $\varphi(x) = x_n - g(x')$ ist

$A = \{ (x', x_n) \mid \varphi(x) \leq 0 \}$ und entspr. M .

Also entlang M

$$v(x) = \frac{\text{grad}(\varphi(x))}{\|\text{grad}(\varphi(x))\|}$$

ist die äußere N.v. Wegen

$$\text{grad}(\varphi(x)) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}, 1 \right)$$

hat v_i die im Lemma 9 ang. Komponenten

2) Bzgl. der Param

$$\psi: U' \rightarrow M, \psi(x') = (x', g(x'))$$

ergibt sich die Gram. Det als

$$1 + \| \text{grad}(g(x)) \|^2$$

Also

$$dS(x) = \sqrt{1 + \| \text{grad}(g(x)) \|^2} dx'.$$

In der Tat

$D\psi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ & & & \vdots \\ & & & \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$. Also $(D_x) D\psi$
 $= (\delta_{ij} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}) = E_{n-1} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$. Da die Matrix A Rang 1 hat, sind nur die beiden ersten Kochs von ψ :

$$\det(E_{n-1} + A) = x^{n-1} + \text{tr}(A)x^{n-2} + 0 \text{ von Null versch.} = x^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \right) x^{n-2}$$

$$\det(E_{n-1} + A) = 1 + \| \text{grad}(g(x)) \|^2$$

3) Setzen wir dies in das Int über M_{n-1} so setzen dass folg. Formeln z.B. sind:

$$(1) \int_A \frac{\partial F}{\partial x_i} = - \int_{U'} F(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i} d^{n-1}(x')$$

und)

$$(2) \int_A \frac{\partial F}{\partial x_n} d^n x = \int_{U'} F(x', g(x')) d^{n-1} x'$$

Beweis: Mit Fubini (2)

$$\int_A \frac{\partial F}{\partial x_n} d^n x = \int_{U'} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F}{\partial x_n} (x', x_n) dx_n \right) d^{n-1} x'.$$

Auf das Innere Int wenden wir den H.S an

$$\begin{aligned} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F}{\partial x_n} (x', x_n) dx_n = F(x', g(x')) - F(x', \alpha) \\ &= F(x', g(x')) \end{aligned}$$

und

$$\int_A \frac{\partial F}{\partial x_n} d^n x = \int_{U'} F(x', g(x')) d^{n-1} x'.$$

wie gewünscht.