Analysis III 11.01.2016

§ 12 - Die Grassmannalgebra

<u>12.1 Definition</u>: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Eine Abbildung

$$\varphi : V^k = V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt Multilinearform, wenn φ linear in jeder der k Komponenten ist, d.h. für alle $i = 1, \dots, k$ gilt

$$\varphi(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v_i', v_{i+1}, \dots, v_k)$$
$$= \lambda \varphi(v_1, \dots, v_k) + \mu \varphi(v_1, \dots, v_i', v_{i+1}, \dots, v_k)$$

für alle Vektoren $v_1, \dots, v_k, v_i' \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

<u>12.2 Beispiel</u>: Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ Linearformen, dann ist $\varphi : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(v_1, \dots, v_k) = \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_k(v_k)$$

eine Multilinearform.

<u>12.3 Definition</u>: Eine Multilinearform

$$\varphi : V^k \to \mathbb{R}$$

heißt alternierend, wenn $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$ für alle k-Tupel $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ von Vektoren $v_1, \dots, \dots \in V$, die linear abhängig sind.

<u>12.4 Bemerkung</u>: Später: $V = T_pU$ wird der Tangentialraum in einem Punkt $p \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sein, $\varphi : T_pU^* \to \mathbb{R}$ soll eine Art „Strömung" in dem Punkt p beschreiben, die jedem Tupel $(v_1, \dots, v_k)$ von Vektoren eine durch das Parallelotop $\{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ „hindurchfließende Masse" zuordnet.

Die Forderung, dass $\mathcal{U}$ alternierend ist, kann man elementar geometrisch verstehen: ein Parallelotop, das von k linear abhängigen Vektoren aufgespannt wird, ist eine k-Nullmenge.

<u>12.5 Satz:</u> Eine Multilinearform $\mathcal{U}: V^k \to \mathbb{R}$ ist genau dann alternierend, wenn für jedes k-Tupel $v_1, \dots, v_k \in V^k$ und je zwei Indizes i, j mit $1 \leq i < j \leq k$ die Regel

$$(*) \quad \mathcal{U}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\mathcal{U}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

beim Vertauschen der i-ten und j-ten Komponente gilt.

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" Im Fall $k=2$ folgt aus $\mathcal{U}$ alternierend und der Multilinearität

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{U}(v_1+v_2, v_1+v_2) = \mathcal{U}(v_1, v_1) + \mathcal{U}(v_2, v_1) + \mathcal{U}(v_1, v_2) + \mathcal{U}(v_2, v_2) \\ &= \mathcal{U}(v_1, v_2) + \mathcal{U}(v_2, v_1), \end{aligned}$$

also $\mathcal{U}(v_1, v_2) = -\mathcal{U}(v_2, v_1)$. Im Allgemeinen zeigt die obige Rechnung durch Hinzufügen zusätzlicher Argumente die Regel $(*)$.

„$\Leftarrow$" Umgekehrt: Erfüllt die Multilinearform $\mathcal{U}: V^k \to \mathbb{R}$ die Regel $(*)$ und sind $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig, etwa

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i$$

für $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so ergibt die Linearität im letzten Argument, dass es genügt, die Formeln $\mathcal{U}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_i) = 0$ für $i = 1, \dots, k-1$ zu zeigen. Die Regel $(*)$ angewendet auf i und $j = k$ ergibt

$$\mathcal{U}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_i) = -\mathcal{U}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_i),$$

also $2\varphi(v_1,\dots,v_{k-1},v_i)=0$. Da $2\in\mathbb{R}$ ein Inverses in $\mathbb{R}$ hat, folgt daraus $\varphi(v_1,\dots,v_{k-1},v_i)=0$ wie gewünscht.

__12.6 Korollar:__ Sei $\varphi: V^k\to\mathbb{R}$ eine alternierende Multilinearform, $v_1,\dots,v_k\in V$ und σ eine Permutation von $\{1,\dots,k\}$. Dann gilt:

$$\varphi(v_1,\dots,v_k) = \mathrm{sgn}(\sigma)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).$$

__Beweis:__ Bekanntlich ist die Signatur einer Permutation σ

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^N,$$

falls sich σ als Produkt von N Transpositionen darstellen lässt. Die Regel $(*)$ gibt also die Formel. $\square$

__12.7 Beispiel:__ Seien $\varphi_1,\dots,\varphi_k\in V^*=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$ Linearformen. Dann ist

$$\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_k := \varphi$$

mit $\varphi: V^k\to\mathbb{R}$ wie folgt definiert ist:

$$\varphi(v_1,\dots,v_k) = \det(\varphi_i(v_j))_{1\le i,j\le n}$$

eine alternierende Multilinearform.

Der Grund für die Bezeichnung $\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_k$ der Form φ wird später klar werden.

12.8 Die Menge der alternierenden Multilinearformen auf V bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir mit

$$\Lambda^k V^* := \{\varphi : V^k \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ alternierende Multilinearform}\}$$

bezeichnen.

<u>12.9 Satz:</u> Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ eine Basis von V^*. Dann bilden die $\binom{n}{k}$ alternierenden Multilinearformen

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \in \Lambda^k V^*$$

mit $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ eine Basis von $\Lambda^k V^*$. Insbesondere gilt $\dim(\Lambda^k V^*) = \binom{n}{k}$.

<u>Beweis:</u> Sei $\varphi \in \Lambda^k \varphi^*$ und $e_1, \dots, e_n \in V$ eine Basis. Wegen der Multilinearität ist φ schon durch die Werte auf den Teilmengen $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in V^k$ bestimmt. Außerdem ergibt weiter, dass φ durch die Werte $\varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ mit Indizes $1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n$ bestimmt ist. In der Tat: mit Korollar 12.6 folgt, dass die Werte auf den Tupel

$$\varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

mit $1 \le j_1 \le j_2 \le \dots \le j_k \le n$ ausreichen und, wenn zwei Indizes gleich sind, ist der Wert stets null. Dies zeigt, dass $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda^k V^*) \le \binom{n}{k}$. Um die Gleichheit einzusehen, und zu zeigen, dass $\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \in \Lambda^k V^*$ für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ eine Basis bildet, betrachten wir speziell die zu $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^k$ duale Basis $e_1, \dots, e_n \in V$. Dann gilt

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \det\left((\delta_{i_\nu j_\mu})_{\substack{\nu = 1, \dots, k \\ \mu = 1, \dots, k}}\right).$$

$$\det\left((\delta_{i_\nu j_\mu})_{1\le\nu,\mu\le n}\right) = \begin{cases} 1 & \{i_1<\dots<i_k\} = \{j_1<\dots<j_k\} \\ 0 & \{i_1<\dots<i_k\} \neq \{j_1<\dots<j_k\} \end{cases}$$

Die $\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}$ mit $1\le i_1<\dots<i_k\le n$ sind linear unabhängig, also

$$\dim(\Lambda^k V^*) \geq \binom{n}{k},$$

daraus folgt die Gleichheit. □

<u>12.10 Bemerkung:</u> Sind $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in V^*$ eine Basis und $J=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}$ eine k-elementige Teilmenge, deren Elemente $i_1<\dots<i_k$ angeordnet sind, so bezeichne

$$\varphi_I := \varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}.$$

Jedes Element $\varphi\in\Lambda^k V^*$ hat somit eine derartige Darstellung

$$\varphi = \sum_{|I|=k} c_I\varphi_I$$

mit $c_I\in\mathbb{R}$. Die Summe versteht sich über alle k-elementigen Teilmengen $I=\{i_1<\dots<i_k\}\subset\{1,\dots,n\}$.

<u>12.11 Bemerkung:</u> Sei V n-dimensional. Dann gilt $\Lambda^k V^* = \{0\}$ für $k>n$, da k Vektoren in V linear abhängig sind.

Wir betrachten nun die direkte Summe

$$\Lambda V^* = \bigoplus_{1\le k\le n} \Lambda^k V^*.$$

Dabei sei $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$, $\Lambda^1 V^* = V^*$.

ΛV^* trägt auf natürliche Weise die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra, wobei $1 \in \Lambda V^* = 1_{\mathbb{R}}$.

12.12 Lemma: Seien $\xi_1, \dots, \xi_k \in V^*$.

1) Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ und $\xi_i' \in V^*$ eine weitere Linearform. Dann gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\xi_1 \wedge \dots \wedge (\lambda \xi_i + \mu \xi_i') \wedge \dots \wedge \xi_k$$
$$= \lambda \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k + \mu\, \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_i' \wedge \dots \wedge \xi_k$$

2) Sei σ eine Permutation von $\{1, \dots, k\}$. Dann gilt
$$\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \xi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \xi_{\sigma(k)}$$

Beweis:

$$\dots = \det \begin{pmatrix} \xi_1(v_1) & \dots & \xi_1(v_k) \\ \vdots & & \\ (\lambda \xi_i + \mu \xi_i')(v_1) & \dots & (\lambda \xi_i + \mu \xi_i')(v_k) \\ \vdots & & \\ \xi_k(v_1) & \dots & \xi_k(v_k) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \det(\xi_i(v_j)) + \mu \det(\xi_i'(v_j)).$$

Die Gleichung folgt also aus der Definition der Determinante.

$\square$

12.13 Satz: Seien $1 \leq k, l \leq n$. Es gibt genau eine Abbildung

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \longrightarrow \Lambda^{(k+l)} V^*$$
$$(\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta,$$

die die Regeln

1) „$\wedge$" ist linear in beiden Argumenten, also
$$(\lambda \omega + \mu \omega') \wedge \eta = \lambda(\omega \wedge \eta) + \mu(\omega' \wedge \eta),$$
analog zweite Komponente, für alle k-Formen, l-Formen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2) $(w_{i_1}\wedge\dots\wedge w_{i_k})\wedge(\eta_{i_1}\wedge\dots\wedge\eta_{i_l})$

$$= w_{i_1}\wedge\dots\wedge w_{i_k}\wedge\eta_{i_1}\wedge\dots\wedge\eta_{i_l} \in \Lambda^{k+l} V^*$$

für beliebige Tupel $(w_{i_1},\dots,w_{i_k})$, $(\eta_{i_1},\dots,\eta_{i_l})$ erfüllt.

Beweis: Seien $e_1,\dots,e_n \in V^*$ eine Basis und

$$w = \sum_{|I|=k} c_I e_I \in \Lambda^k V^*,$$

$$\eta = \sum_{|J|=l} c_J e_J \in \Lambda^l V^*$$

die Basisdarstellungen von w und η. Wegen 1) und 2) muss

$$(**) \qquad w\wedge\eta = \sum_{|I|=k,\,|J|=l} c_I c_J\, e_I\wedge e_J$$

gelten. Umgekehrt können wir daher diese Formel zur Definition des $\wedge$-Produktes $\wedge: \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{(k+l)} V^*$ verwenden. Regeln (1) und (2) gelten für diese Abbildung wegen Lemma 12.12. $\square$