

4.13 a Definition

1. Ein messbarer Raum $(X, \mathcal{A})$ ist eine Menge X zsm. mit einer $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die σ -Algebra bildet:
d.h. 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \forall k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
2. Sei $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B}$.

3. Ein Maß μ auf einem messbaren Raum ist eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ mit: $\mu(\emptyset) = 0$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Ein Maßraum ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $(X, \mathcal{A})$ ist messbarer Raum und μ ein Maß.

4. X bel. Menge $E \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge. Dann heißt die kleinste σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $E \subset \mathcal{A}$, die von E erzeugte σ -Algebra.

5. $X = \mathbb{R}^n$, $E = \mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, das System der offenen Mengen heißt dann die von $\mathcal{I}$ erzeugte σ -Algebra die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}^n$.

$E' = \{Q \subset \mathbb{R} \mid Q \text{ abg. Quader}\}$ ist ein anderes Erzeugendensystem dieser σ -Algebra.

$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \forall B \in \mathcal{B}$, heißt das L -Maß auf $\mathbb{R}^n$.

4.14 Satz

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(Y, \mathcal{B})$ ein Messraum und $f: X \rightarrow Y$ eine messbare Abb. Dann definiert $f_*\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ mit $(f_*\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B))$. $\square$

6. Definition

Ein Wkssraum $(X, \mathcal{A}, P)$. P ein Maß mit $P(X) = 1$.
 $(\Omega := X)$

7. Eine Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung

$$X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{Borel}).$$

Bemerkung zu 6: $A \subset \Omega$. Dann interpretieren wir $P(A)$ als die Wkss., dass ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$ in A liegt.

$P = X_* P$ $P([a; b])$ ist die Wkss., dass der Wert von X in einem „Experiment“ in $[a; b]$ liegt.

4.10 Satz (Majorisierte Konvergenz)

Sei (f_k) eine Folge von integrieren Fkt. auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall gegen eine Fkt. f konv. Wenn es eine integrierbare Fkt. $F \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass

$$|f_k| \leq F \quad \forall k$$

dann ist F integrierbar und es gilt:

$$\int f_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

Beweis: Weil F integrierbar ist, gibt es eine Nm. N' , sd. $F(x) < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N'$. Sei N'' eine weitere Nm, sd. $(f_k(x))$ ggn. F konv. $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N''$. Auf $N := N' \cup N''$, die f_k, F und F so ab, indem wir sie dort 0 setzen. Dadurch ändert sich die Integrierbarkeit nicht, und die Int. bleiben gleich und es gilt.

$$|f_k(x)| \leq F(x)$$

$$\text{und } \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alle Werte $f_k(x), f(x), F(x) \neq \infty$ und es genügt der Fall von reellwertigen Funktionen. Sei nun

$$g_k = \sup \{f_i : i \geq k\}$$

g_k ist der monoton GW der Folge

$g_k \in \{f_k, \dots, f_{k_0}\} \quad \forall k = 0, 1, \dots$

Die Fkt g_k sind integrierbar und die Folge der Int ist durch $\int f_k dx$ beschränkt, da $|g_k| \leq f$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist $g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$ integrierbar und

$$\int g_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \leq \int f dx.$$

Die Folge g_k konv. monoton fallen ab ggü. Fund mit beschränkte Integrale $\Rightarrow f$ ist integrierbar und

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k dx.$$

Um schließlich

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

einzusehen, betrachten wir analog zu oben die Folge $g_k^* = \inf \{f, 1/k\}$. Dann ergibt sich analog die Integrierbarkeit der g_k^* und

$$\int g_k^* dx \leq \int f_k dx \leq \int g_k dx$$

gibt die Behauptung, da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^* dx = \int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k dx$$

gilt. $\square$

4.17 Folgerung

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ endlich messbar und $f_k: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Folge von über A integrierbaren Fkt, die glm beschr., d.h. $\exists M \in \mathbb{R}_{>0}$

$$|f_k| \leq M \quad \forall k$$

konv. die Folge f_k pw. fast überall gegen eine Grenzfkt $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dann ist f über A integrierbar und

$$\int f dx = \lim \int f_k dx.$$

Beweis: M. 1.1 ist eine Majorante der Folge f_k . $\square$

4.18 Satz (Starke Abhängigkeit von Parametern)

Sei M ein met. Raum, $f \in \mathbb{R}^n$ und

$$F: M \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

eine Fkt mit folgenden Eigenschaften:

1) Für jedes feste $\lambda \in M$ sei die Fkt.

$$x \mapsto F(\lambda, x)$$

über A integrierbar.

2) Für jedes feste $x \in A$ ist die Abb.

$$\lambda \mapsto F(\lambda, x) \text{ eine stetige Fkt. auf } M.$$

3) Es gebe eine auf A integrierbare Fkt $\Phi \geq 0$, sol.

$$|F(\lambda, x)| \leq \Phi(x) \quad \forall (\lambda, x) \in M \times A.$$

Dann ist die durch

$$F(x) = \int_M F(\lambda, x) d\mu$$

auf M def. Fkt stetig.

Beweis: Wir überprüfen die Stetigkeit von $F: M \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Folgenkrit.

Sei (λ_k) eine Folge in M , die gegen $\lambda_0 \in M$ konv.

Sei $F_k(x) = F(\lambda_k, x)$ und $F(x) = F(\lambda_0, x)$. Auf die

Folge (F_k) lässt sich der Satz über Majorante

Konvergenz anwenden. Wegen 2) gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = F \text{ überall und 3) liefert die}$$

Majorante. $\square$

Bemerkung: (4.19)

Die Existenz der Schranke Φ ist oft leicht einzusehen. z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ beide kompakt,

dann können wir Φ konstant wählen mit Wert

$$\max \{ |F(\lambda, x)| : \lambda \in M, x \in A \}.$$

4.20 Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset \mathbb{R}^n$ und

$$F: M \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

habe folgende Eigenschaften:

1) Für festes $t = (t_1, \dots, t_m) \in M$ ist $x \mapsto F(t, x)$ über A integrierbar.

2) Für festes $x \in A$ sei $t \mapsto F(t, x)$ auf M diffbar.

3) Es gelte eine über A integrierbare Fkt $\Phi \geq 0$, so

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t_j}(t, x) \right| \leq \Phi(t)$$

$\forall (t, x) \in M \times A$ und $j = 1, \dots, m$. Dann ist die durch

$$F(t) = \int_A F(t, x) dx$$

def. Fkt. auf M stetig diffbar.

Für festes $t \in M$ sind die Fkt

$$x \mapsto \frac{\partial F}{\partial t_j}(t, x)$$

über A integrierbar und es gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_A \frac{\partial F}{\partial t_j}(t, x) dx.$$

Beweis: Sei $y_0 \in M$ und $r > 0$ so klein, dass

$$\{y \mid \|y - y_0\|_\infty = \max \{ |y_j - y_{0j}| \} < r\} \subset M.$$

Sei (h_k) eine NF reeller Zahlen und $h_k \neq 0, 1/h_k \in M$.

Wir setzen dann $y_k = y_0 + h_k e_j \in M$ und

$$\varphi_k(x) := \frac{F(y_k, x) - F(y_0, x)}{h_k}$$

Die φ_k sind über A integrierbare Fkt und $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \frac{\partial F}{\partial t_j}(y_0, x)$.

Nach dem MWS und 3) gilt: $|\varphi_k| \leq \Phi$. Majorierte

Konvergenz folgt, dass auch die Grenzfkt $\frac{\partial F}{\partial t_j}(y_0, -)$

über A integrierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial F}{\partial t_j}(y_0, x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \varphi_k(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(y_k) - F(y_0)}{h_k}. \end{aligned}$$

Es folgt: F ist part. überall integrierbar und mit dem Stetigkeitssatz folgt die stetig part. Diffbarkeit. $\square$

