Analysis III   Friedrich Günther   10.12.2015

Es genügt

$$(1) \quad \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \, d^n x = -\int_{U'} f(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x') \, d^{n-1} x \quad \text{für } 1 \le i \le n-1$$

und

$$(2) \quad \int_A \frac{\partial f}{\partial x_n} \, d^n x = \int_{U'} f(x', g(x')) \, d^{n-1} x'$$

zu zeigen. (2) haben wir gezeigt.

Zu (1): Wir betrachten für $1 \le i \le n-1$

$$F(x', z) = \int_\alpha^z f(x', x_n) \, dx_n$$

mit $z \in [\alpha, \beta]$. Dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x', z) = f(x', z)$$

und $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, z) = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n) \, dx_n$, denn f ist stetig differenzierbar und hat kompakten Träger, also Integration und Differentiation vertauschen. Mit der Kettenregel folgt

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) \, dx_n = \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n) \, dx_n + f(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_n}(x').$$

Die Funktion

$$x' \longmapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) \, dx_n$$

hat kompakten Träger in U'. Mit Satz (9.10) folgt

$$(\ast\ast\ast) \quad \int_{\mathcal{U}'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n)\, dx_n \right) dx' = 0 .$$

Mit Fubini folgt:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_n = \int_{\mathcal{U}'} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n)\, dx_n \right) d^{n-1}x'$$

$$= - \int_{\mathcal{U}'} f(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x')\, d^{n-1}x'$$

$\square$

3.13: Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Vektorfelder

$$F = (F_1, \dots, F_n) : M \to \mathbb{R}^n ,$$

deren Träger $\mathrm{Supp}(F) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Supp}(F_i)$ den singulären Rand $\partial_S K$ nicht trifft.

Die Idee ist, mithilfe einer Zerlegung der 1 die Aussage auf die Spezialfälle 3.10 und 3.11 zurückzuführen.
Sei $B = K \cap \mathrm{Supp}(F)$, also B kompakt. Zu jedem Punkt $x \in B$ wählen wir eine Umgebung $\mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^n$ wie folgt:

(1) Ist $x \in K^\circ$, dann wählen wir $\mathcal{U}_x \subset K^\circ$,

(2) Für $x \in \partial_R K$ wählen wir $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$ so, dass es eine reguläre Funktion

$$\psi : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}$$

gibt, so dass $K \cap \mathcal{U}_x = \{ y \in \mathcal{U}_x \mid \psi(y) \le 0 \}$ und $\partial K \cap \mathcal{U}_x = \{ y \in \mathcal{U}_x \mid \psi(y) = 0 \}$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen können wir

U_x auffinden so klein wählen, dass sich die Gleichung $\varphi(y)=0$ nach einer der Variablen auflösen lässt.

Nach Umnummerieren sei dies die letzte Variable x_n; ist dann $g: U_x' \to \mathbb{R}$ eine Auflösung der Gleichung $\varphi(x', x_n)=0$, also $\varphi(x', g(x'))=0$, so wählen wir U_x in der Form $U_x' \times I$ mit einem Intervall I, so dass

$$K \cap U_x = \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n \leq g(x')\}$$

und

$$\partial K \cap U_x = \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n = g(x')\}$$

gilt. Sei nun $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine der Überdeckung $\{U_x \mid x \in B\} = \mathcal{U}$ untergeordnete differenzierbare Zerlegung der 1, d.h. mit $B \subset U = \bigcup_x U_x$

$$\varepsilon_i : U \to \mathbb{R} \qquad 0 \leq \varepsilon_i \leq 1,$$

für jedes i $\exists x = x(i)$, so dass $\mathrm{Supp}(\varepsilon_i) \subset U_{x_i}$, $\forall x \in U$ $\exists$ nur endlich viele ε_i mit $\varepsilon_i(x) \neq 0$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(x) = 1 \qquad \forall x \in U.$$

Da B kompakt ist gibt es endlich viele ε_i, so dass $\bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{Supp}(\varepsilon_i))^{\circ} \supset B$ gilt. Es ist dann

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x) > 0 \qquad \forall x \in B$$

und indem wir ε_i durch $\varepsilon_i / \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ ersetzen, können wir $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ finden, so dass $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(x) = 1$ $\forall x \in B$ gilt. Auf die Vektorfelder $\varepsilon_i F$ lässt sich jeweils 9.11 oder 9.10 anwenden

Es gilt also jeweils

$$\int_K \operatorname{div}(\varepsilon_i F)\, d^n x = \int_{\partial K} \langle \varepsilon_i F, \nu \rangle\, dS.$$

Aufsummieren gilt

$$\int_K \operatorname{div} F\, d^n x = \int_K \operatorname{div}\Big(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i F\Big)\, d^n x$$

$$= \int_{\partial K} \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_i F, \nu \rangle\, dS$$

$$= \int_{\partial K} \langle F, \nu \rangle\, dS$$

$\square$

Bemerkung (Wohldefiniertheit des Integrals auf Untermannigfaltigkeiten):

$$\int_{U_i} f\, \varepsilon_i \eta_k\, dS = \int_{U_k} f\, \varepsilon_i \eta_k\, dS$$

Das Integral $\underbrace{\int_{U_i} |f \varepsilon_i|\, dS < \infty}_{= \int_{V_i} f \circ \varphi_i\; \varepsilon_i \circ \varphi_i \sqrt{g}\, d^n x}$ existiert, obwohl $\eta_k|_{U_i}$ nicht kompakten Träger haben; Satz über monotone Konvergenz und über majorisierte Konvergenz nach kompakter Ausschöpfung.

9.14 Lemma (zu konzentrischen Würfeln $W, W^* \subset \mathbb{R}^n$ mit Kantenlängen $r, 2r$):

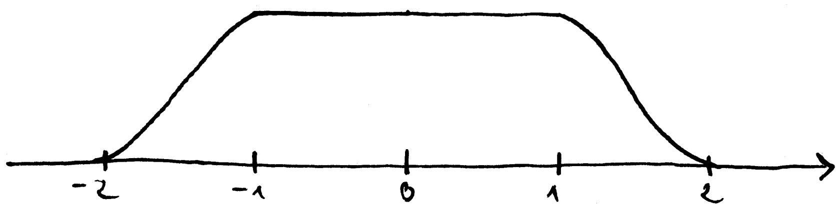
Zu konzentrischen Würfeln $W, W^* \subset \mathbb{R}^n$ mit Kantenlängen $r, 2r$ gibt es eine C^∞-Funktion ρ auf $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften

1) $0 \le \rho \le 1$ 2) $\rho|_W \equiv 1$ 3) $\rho|_{\mathbb{R}^n \setminus W^*} \equiv 0$

und 4) $\|\operatorname{grad} p\| \le c/r \cdot 1_{W^*}$, wobei c eine von W unabhängige Konstante ist.

Beweis: Wir wählen eine C^∞-Funktion $\varphi: \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$\begin{cases} \varphi = 1 & \text{auf } [-1,1] \qquad (2') \\ \varphi = 0 & \text{auf } \mathbb{R}\setminus[-2,2] \qquad (3') \end{cases}$$



Ist dann $a = (a_1, \dots, a_n)$ der Mittelpunkt von W, W^*, so setzen wir

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n} \varphi\left(\tfrac{2}{r}(x_k - a_k)\right).$$

p hat offensichtlich die Eigenschaften (1)–(3). Wegen

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x_k}(x)\right| \le \frac{2}{r}\varphi'\left(\tfrac{2}{r}(x_k - a_k)\right) \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}} \varphi\left(\tfrac{2}{r}(x_l - a_l)\right)$$

$$\le \frac{2}{r}\varphi'\left(\tfrac{2}{r}(x_k - a_k)\right)$$

gilt 4) mit $c = 2\sqrt{n} \cdot \max\{|\varphi'(t)| \mid t \in [-2,2]\}$ $\square$

§15 Beweis (des Gaußschen Integralsatzes):

Der singuläre Rand $\partial_s K = \partial K \setminus \partial_r K$ ist abgeschlossen und beschränkt und eine $(n-1)$-Nullmenge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also wegen der Kompaktheit von $\partial_s K$ endlich viele Würfel $W_1, \dots, W_m$ mit Kantenlängen $r_1, \dots, r_m$, so dass

$$\partial_S K \subset \bigcup_{j=1}^{m} W_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m} r_j^{\,n-1} < \varepsilon .$$

Sei W_k^* der zu W_k konzentrische Würfel doppelter Kantenlänge $2r_k$. Nach dem Lemma existieren C^∞-Funktionen p_k auf $\mathbb{R}^n$, so dass

1) $0 \le p_k \le 1$,
2) $p_k|_{W_k} = 1$,
3) $p_k|_{\mathbb{R}^n \setminus W_k^*} = 0$,
4) $\|\operatorname{grad} p_k\| \le c/r_k \cdot 1_{W_k^*}$.

Dann sei

$$\psi_\varepsilon = \prod_{k=1}^{m} (1 - p_k)$$

Dann ist ψ_ε eine C^∞-Funktion mit

1) $0 \le \psi_\varepsilon \le 1$,
2) $\psi_\varepsilon = 0$ auf $W_1 \cup \dots \cup W_m$,
3) $\psi_\varepsilon = 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus (W_1^* \cup \dots \cup W_m^*)$,
4) $\|\operatorname{grad} \psi_\varepsilon\| \le c \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{r_k} 1_{W_k^*}$.

Da F auf K stetig ist und $\partial_R K$ endlich messbar ist und sich auf $\psi_\varepsilon \cdot F$ der bisher bewiesene Teil des Gauß'schen Integralsatzes anwenden lässt, also

$$\int_K \operatorname{div}(\psi_\varepsilon F)\, d^n x = \int_{\partial K} \langle \psi_\varepsilon F, \nu \rangle \, dS$$

gilt, lässt sich auf die rechte Seite der Satz über majorisierte Konvergenz anwenden mit Majorante $C_1 = \max_{x \in \partial K} \{ \|F(x)\|_2 \}$ und

$$|\langle \chi_\varepsilon F, \nu \rangle| \le C_1 \quad \text{auf} \quad \partial_r K$$

und

$$\int_{\partial_r K} c \, dS = c \operatorname{vol}(\partial_r K) < \infty .$$

Also gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial_r K} \langle \chi_\varepsilon F, \nu \rangle \, dS = \int_{\partial_r K} \langle F, \nu \rangle \, dS$$
$$= \int_{\partial K} \langle F, \nu \rangle \, dS .$$

Für die linke Seite gilt

$$\operatorname{div}(\chi_\varepsilon F) = \chi_\varepsilon \operatorname{div}(F) + \langle \operatorname{grad} \chi_\varepsilon , F \rangle ,$$

der Grenzwert erfüllt dann

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_K \chi_\varepsilon \operatorname{div}(F) \, dx = \int_K \operatorname{div}(F) \, dx$$

mit dem Satz über majorisierte Konvergenz, schließlich

$$\left| \int_K \langle \operatorname{grad} \chi_\varepsilon, F \rangle \, dx \right| \le \int_K \| \operatorname{grad} \chi_\varepsilon \| \cdot \| F \| \, dx$$
$$\le C_1 \cdot c \cdot \sum_{k=1}^n 1/r_k \int_K 1_{W_k^*} \, dx$$
$$\le C_1 \cdot c \cdot \sum_{k=1}^n 2^n r_k^{n-1}$$
$$\le C \cdot c \cdot 2^n \cdot \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

$\square$

14.12.2015

Gauß hat seine Integralformel 1840 bewiesen / veröffentlicht. Schon vor Gauß hatte Green 1827 eine zunächst wenig beachtete Arbeit veröffentlicht, die viele Ergebnisse von Gauß schon erzielt hatte.

9.16 Satz (Green'sche Formel): Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit fast überall differenzierbarem endlich messbarem Rand und $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen, die auf einer offenen Menge $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind. Dann gilt

$$\int_K \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle \, dx = \int_{\partial K} f \, \partial_\nu(g) \, dS - \int_K f \Delta g \, dx$$

und

$$\int_K (f \Delta g - g \Delta f) dx = \int_{\partial K} (f \, \partial_\nu(g) - g \, \partial_\nu(f)) \, dS.$$

Dabei bezeichnet $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ den Laplace-Operator und $\partial_\nu(h) := \langle \operatorname{grad} h, \nu \rangle$, wobei die Ableitung von h in Normalenrichtung ν von K entlang ∂K ist.

Beweis: Die erste Formel ergibt sich aus dem Gauß'schen Integralsatz angewendet auf $F = f \operatorname{grad} g$, es gilt nämlich:

$$\operatorname{div} F = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle + f \Delta g$$

und

$$\langle F, \nu \rangle = f \langle \operatorname{grad} g, \nu \rangle = f \, \partial_\nu(g).$$

Die zweite Formel ergibt sich, indem wir die Formel für die Paare f,g bzw. g,f subtrahieren. $\square$

<u>9.17 Anwendung</u> (Energieerhaltungssatz für Lösungen der Wellengleichung): Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\begin{aligned} u : I \times \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto u(t,x) \end{aligned}$$

eine Funktion. Ein solches $u : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Wellengleichung, wenn u zweimal stetig partiell differenzierbar ist und die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0$$

erfüllt. Dabei ist $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ der Laplace-Operator in Ortskoordinaten. Sei $K \subset \mathcal{U}$ ein Kompaktum mit fast überall glatten, messbaren Rand und $u : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit der Eigenschaft

$$u\big|_{I \times \partial K} = 0 .$$

Dann ist die Funktion

$$E(t) = \int_K (u_t(t,x))^2 + \|\operatorname{grad}_x u\|^2 \, dx$$

konstant. grad_x bezeichnet dabei den Gradienten in den Ortskoordinaten.

Beweis: Vertauschen von Integration und Differentiation und die erste Green'sche Formel gibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_K \|\operatorname{grad}_x u\|^2 \, dx = \int_K 2 \langle \operatorname{grad}_x u_t , \operatorname{grad}_x u \rangle \, dx$$

$$= \int_{\partial K} 2 u_t \, \partial_\nu(u) \, dS - \int_K 2 u_t \, \Delta_x u \, dx .$$

Die Randbedingung $u|_{I \times \partial K} = 0$ impliziert, dass der erste Term $= 0$ ist. Die Voraussetzung, dass u eine Lösung der Wellengleichung ist besagt

$$\Delta_x u = u_{tt} ,$$

also

$$-2 \int_K u_t \, \Delta_x u \, dx = -2 \int_K u_t \, u_{tt} \, dx$$

$$= - \int_K \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) \, dx$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} \int_K u_t^2 \, dx .$$

Es folgt also $\frac{\partial}{\partial t} E(t) = 0$, damit ist $E(t)$ konstant.

$\square$

§10 - Differentialformen

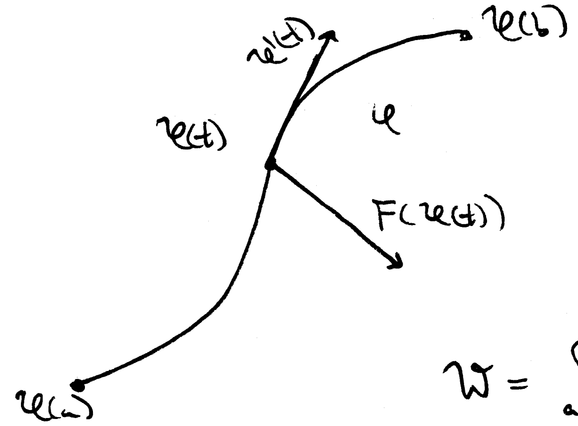
10.1 Motivation: 1) Kraftfelder: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld. Sei $P : V \to U$ ein Diffeomorphismus, $V \subset \mathbb{R}^3$ offen (P z.B. Kugelkoordinaten).

Frage: Wie beschreibt man das Kraftfeld F in den Koordinaten von V?

$F\circ P: V\to\mathbb{R}^3$ ist sicherlich nicht richtig, denn dies berücksichtigt nicht, dass es einen Zusammenhang zwischen den $\mathbb{R}^3$'s

- $\mathbb{R}^3$, der $x\in U\subset\mathbb{R}^3$ und
- $\mathbb{R}^3$, der $F(x)\in\mathbb{R}^3$ enthält

gibt. Etwas klarer wird der Sachverhalt, wenn wir die Arbeit W betrachten, die wir leisten müssen, um einen Massepunkt entlang eines Weges $\gamma:[a,b]\to U\subset\mathbb{R}^3$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ zu bewegen.



$$W=\int_a^b\langle\gamma'(s),F(\gamma(s))\rangle\,ds$$

Ist nun γ von der Gestalt $\gamma=P\circ\psi$ mit $\psi:[a,b]\to V$ stetig differenzierbar, dann ergibt sich aus der Kettenregel

$$\gamma'(s)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial P}{\partial x_j}(\psi(s))\,\psi_j'(s)$$
$$=(DP)(\psi(s))\cdot\psi'(s),$$

wobei $(DP)=\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$ die Jacobimatrix ist. Also

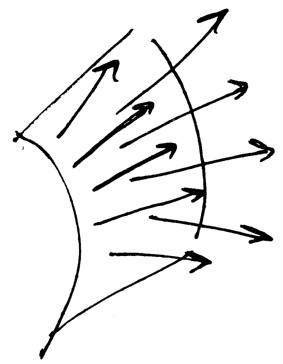
$$W=\int_a^b\langle(DP)(\psi(s))\cdot\psi'(s),(F\circ P)(\psi(s))\rangle\,ds$$
$$=\int_a^b\langle\psi'(s),DP(\psi(s))^t(F\circ P)(\psi(s))\rangle\,ds.$$

Wir sehen: die korrekte Beschreibung von F in den Koordinaten von V ist

$$(DP)(x)^t\,(F\circ P)(x)$$

Beachten wir, dass die Geschwindigkeitsvektoren $\mathcal{U}'(s)$ Tangentialvektoren sind, so sehen wir, dass wir $F(x)$ am besten als Element des Dualraums $(T_x\mathcal{U})^* = \mathrm{Hom}(T_x\mathcal{U}, \mathbb{R})$ auffassen sollten.

10.2 Strom oder Strömungen: Sei $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3$ offen. Eine Strömung auf $\mathcal{U}$ lässt sich zu einem Zeitpunkt durch Geschwindigkeitsvektoren $G:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$ der strömenden Masse beschreiben. Diesmal ist das Transformationsverhalten anders: Fundamentale Größe einer Strömung ist die Masse, die in einem Zeitintervall durch eine Fläche $S\subset\mathbb{R}^3$ hindurchfließt.



Approximieren wir die Fläche durch kleine Parallelogramme, die von zwei Tangentialvektoren der Fläche im Punkt x aufgespannt wird, so sehen wir, dass jedem Parallelogramm aus Tangentialvektoren durch den Strom eine reelle Zahl zugeordnet wird.

$$T_x \times T_x \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t_1, t_2) \longmapsto \det(t_1, t_2, G(x))$$

Am besten fassen wir $G(x)$ als eine alternierende Bilinearform auf T_x auf. Mit dieser Beschreibung ergibt sich das korrekte Transformationsverhalten von G unter Koordinatenwechseln

$$P : V \longrightarrow U \qquad (P \text{ Diffeomorphismus}, V, U \subset \mathbb{R}^3 \text{ of}$$

wie folgt: Auf V wird die Strömung durch

$$Ad(DP(x))^t ((G \circ P)(x))$$

beschrieben. Dabei ist

$$Ad(DP(x))^t$$

die Matrix der 2×2 Minoren von $(DP(x))^t$.

10.3: Das Transformationsverhalten ist in den beiden Fällen verschieden und kompliziert, also fehleranfällig. Das Kalkül der Differentialformen, welchen wir im Folgenden entwickeln werden, erlaubt das Transformationsverhalten spielend leicht zu beherrschen. Der Schlüssel zum Verständnis liegt darin, die Identifikation des $\mathbb{R}^n$, die $U \subset \mathbb{R}^n$ enthält und $T_x U \cong \mathbb{R}^n$ der Tangentialraum von U im Punkt x nicht mehr zu machen.

Was ist der Tangentialraum?

Eine Möglichkeit ist

$$T_p\mathbb{R}^n = \{ \text{Richtungsableitungen } D_v \text{ im Punkt } p \}.$$

Eleganter, aber abstrakter, ist folgende Definition:

<u>10.4 Definition</u> (Funktionskeime): Sei $p \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{D}(p) = \{ f \mid f \ \mathcal{C}^\infty\text{-Funktionen}; f \text{ auf Umgebung } V \text{ von } p \text{ definiert} \}$$

$$= \bigcup_{V \ni p \text{ offen}} C^\infty(V)/\sim$$

wobei $f_1 : V_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : V_2 \to \mathbb{R}$ äquivalent sind, falls eine offene Menge W mit $p \in W \subset V_1 \cap V_2$ existiert, so dass $f_1|_W = f_2|_W$.

$\mathcal{D}(p)$ ist ein Ring; das Produkt zweier solcher Funktionen ist auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche definiert und differenzierbar.

<u>10.5 Definition</u>: Eine Derivation auf $\mathcal{D}(p)$ ist eine Abbildung

$$D : \mathcal{D}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften

1) D ist $\mathbb{R}$-linear, also

$$D(af + bg) = aD(f) + bD(g);$$

2) D erfüllt die Produktregel

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g).$$

Aus 2) folgt

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1) \rightsquigarrow D(1) = 0$$

und mit der Linearität ergibt sich: $D(a) = 0$ für alle konstanten Funktionen $a \in \mathbb{R}$. Also: Derivationen bilden konstante Funktionen auf 0 ab. Die Menge der Derivationen auf $\mathcal{D}(p)$ bildet einen Vektorraum mit

$$(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f)$$

und

$$(aD)(f) = aD(f).$$

Der Vektorraum der Derivationen auf $\mathcal{D}(p)$ nennen wir den Tangentialraum von $p \in \mathbb{R}^n$; Schreibweise: $T_p\mathbb{R}^n$. Spezielle Derivationen liefern die partiellen Ableitungen:

10.6
$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}(p) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

<u>10.7 Satz</u>: $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ bilden eine Basis von $T_p\mathbb{R}^n$.