

5. Satz von Fubini

5.1. Satz (Fubini)

Sei f eine integrierbare Fkt auf $X \times Y$ mit $X = \mathbb{R}^p$,
 $Y = \mathbb{R}^{n-p}$. $1 \leq p \leq n-1$. Dann gilt:

a) Für jedes feste $y \in Y$ ist die Fkt $x \mapsto f(x, y)$
ist über X integrierbar (b.z. auf evtl. Nm.).

b) Für $y \in Y \setminus N$ sei:

$$F(y) = \int_X f(x, y) dx \quad \text{und}$$

$$F(y) = 0 \quad \text{für } y \in N.$$

Dann ist F über Y integrierbar und es gilt:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_Y F(y) dy.$$

Meist schreibt man kurz:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$

Zum Beweis benötigt ein Lemma. $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^{n-p}$
gilt für ganzes Kapitel.

5.2. Lemma

Sei $A \subset X \times Y = \mathbb{R}^n$ eine Nm. Dann ist für fast alle
 $y \in Y$ die Schnittmenge

$$A_y = \{x \in X \mid (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^p$$

eine Nm. in X .

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es Quader $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ mit
 $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$. Jeder Quader Q_k
ist ein Produkt $Q_k = Q_k' \times Q_k''$, $Q_k' \subset X$, $Q_k'' \subset Y$.

$v(Q_k) = v(Q_k') \cdot v(Q_k'')$. Für $y \in Y$ setzen wir ein
 $g(y) = \|1_{A_y}\|_1^+$ wobei $\| \cdot \|_1^+$ die L_1 -Nm auf X

bezeichnet. Wegen $1_{A_y} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k'} \cdot 1_{Q_k''}(y)$ gibt die obg.

1- Ungl. $g(y) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k') \cdot 1_{Q_k''}(y)$. g ist somit
eine Fkt auf Y mit $\|g\|_1^+ \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k') \cdot v(Q_k'') < \varepsilon$,

Für bel. ε . Also $\|g\|_1^+ = 0$. Nach Satz 3.16 ist also

g fast überall 0, d.h. $\int_N g_Y = 0$, d.h. $g_Y = 0$ a.e. Y . Dies besagt, dass A_Y eine Nm. ist in X wieder mit 3.10.17

5.3 Bemerkung

Im Lemma 5.2. kann man auf die Nm. N nicht verzichten. Für einen ausgetretenen Quader $A = Q \times E_Y$, $Q' \subset X$ keine ausg. Quader, ist $A_Y = Q'$ keine Nm.

Beweis von Satz 5.1.:

Nach dem Korollar zu Satz F.R. gibt es eine Folge von Tripletts (P_k) auf $X \times Y = \mathbb{R}^n$ mit $\|F - P_k\|_1 \xrightarrow{k} 0$, d.h.

1) (P_k) konv. außerhalb einer Nm. $A \subset X \times Y$ p.w.

gegen F .

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \|P_{k+1} - P_k\|_1 < \infty$.

Wir zeigen zunächst dass für fest alle $y \in Y$ die Fkt.-Folge $x \mapsto P_k(x, y)$ in einem zu (1) und (2)

analogen Weise ggn. die Fkt. $x \mapsto F(x, y)$ konv.

Mit dem Lemma 5.2. ist (1) klar. Es gibt eine Nullmenge $N' \subset Y$, d.h. $\forall y \in Y \setminus N'$ der Schnitt A_Y eine Nullmenge in X . Ist $F_Y \in Y \setminus N'$ konvergiert

$$P_k(x, y) \rightarrow F(x, y) \quad \forall x \in X, A_Y.$$

Also konv. $P_k(\cdot, y)$ fast überall ggn. $F(\cdot, y)$

$\forall y \in Y \setminus N'$. Sei nun

$$H_k(y) = \int_X |P_{k+1}(x, y) - P_k(x, y)| d\mu_X.$$

$|P_{k+1} - P_k|$ ist eine Tripletts und nach dem Satz von Fubini. Für Tripletts gilt:

$$\int_Y H_k(y) dy = \int_{X \times Y} |P_{k+1} - P_k| d(\mu_X \times \mu_Y) = \|P_{k+1} - P_k\|_1$$

(ii) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y H_k(y) dy < \infty$

Es folgt: Die Folge der P_k der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} H_k$ wächst mon-

noten und die Int. bleiben beschränkt. Also nach dem Satz über monotone Konvergenz ist $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ eine int. Fkt auf Y . Insbesondere gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) < \infty \forall y \in Y \setminus N$. Für eine Nm. $N'' \subset Y$. Also (2)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k+1}(\cdot, y) - f_k(\cdot, y)\|_1^+ < \infty \quad \forall y \in Y \setminus N''.$$

Sei nun $N = N' \cup N''$. Aus (2)* folgt, dass $f_k(\cdot, y)$ eine L_1 CF ist und F.R.-Satz sagt, dass es eine TF gibt, die fast überall gegen eine $\int$ über X int. bore Fkt konv.

Das zeigt Teil (a). Ferner folgt nach mit F.R.

$$(*) \int_X f(t, y) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(t, y) dt \quad \forall y \in Y \setminus N.$$

Für (b) betrachten wir:

$$\bar{f}_k(y) = \int_X f_k(t, y) dt.$$

Die $\bar{f}_k$ sind dann TrpFkt auf Y mit folg. Eigenschaften.

(1)* $\bar{f}_k$ konv auf $Y \setminus N$ gegen F (folgt aus (*)).

(2)* $\sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}_{k+1} - \bar{f}_k\|_1^+ < \infty$.

(2)* folgt dabei, da

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_{k+1}(y) - \bar{f}_k(y)\|_1^+ &= \int_X |f_{k+1}(t, y) - f_k(t, y)| dt \\ &\leq \int_X |f_{k+1} - f_k| dt = H_k(y). \end{aligned}$$

Wegen (2)* ist $(\bar{f}_k)$ eine L^1 -CF auf und nachmals F.R., dass eine TF. $\bar{f}$ gegen eine int. bore Fkt konv.

Diese stimmt mit F fast überall überein. Nach

(1)* ist F also int. bore und

$$\begin{aligned} \int_Y F(y) dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y \bar{f}_k(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_k(t, y) d(t, y) \quad (\text{Fubini TrpFkt}) \\ &= \int_{X \times Y} f(t, y) d(t, y) \end{aligned}$$

nach Wahl der f_k . $\square$

5.4. Korollar

Ist F über $X \times Y$ int. bore, dann gilt:

$$\int_X \int_Y f(t, y) dy dt = \int_Y \int_X f(t, y) dt dy. \quad \square$$

5.5 Bemerkung

Die Vertauschung der Int. Rf. kann den Wert ändern

Beispiel: $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy \neq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx$

denn $\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} \right] dx$
 $= \left[-\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} \right]_0^1$
 $= -\frac{1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2} - \left(-\frac{1}{y} + \frac{y}{y^2} \right)$

$\Rightarrow$ 1.tes Doppelintegral $= \int_0^1 \frac{-(1+y)+y}{(1+y)^2} dy$
 $= \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy = \left(\frac{1}{1+y} \right)_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ 2.tes Doppelint hat den Wert $\frac{1}{2}$, wegen der Sym-

metrie bzgl. $x \leftrightarrow y$. $\square$

5.6 Satz (Tonelli)

Es sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ lokal integbar (d.h. für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$ existiert eine kompakte Umgebung über die f integbar ist).

f ist genau dann integbar, wenn wenigstens eines der iterierten Integrale bzgl. $|f|$

$$\int_X \int_Y \text{ oder } \int_Y \int_X$$

existiert.

Beweis: Die Notw. der Bed. ist klar mit Fubini

da mit f auch $|f|$ integbar ist.

Für die Umkehrung reicht es die Integrierbarkeit

von $|f|$ zz. Sei $W_k := [-k, k]^n \subset \mathbb{R}^n = X \times Y$ und

$$F_k = \min \{ |f|, k \}.$$

Dann ist F_k integbar, da $\min \{ |f|, k \}$ lokal integbar

ist nach Vor. $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = |f|$ ist ein monotoner Grenzfunkt.

$$\text{und } \int_{X \times Y} F_k(x, y) d\mu(x, y) = \int_Y \left(\int_X F_k(x, y) d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) \\ \leq \int_Y \left(\int_X |f| d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Folgt die Integrierbarkeit von $|f|$ aus dem Satz über mo-

notone Konvergenz. Dabei haben wir die Existenz

einer der iterierten Int. zw. Beschränkter, der Folge der Int. verwendet. $\square$

6. Transformationsformel

6.1

In diesem Paragraph wollen wir die Substregel:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar, f stetig, $f \circ \varphi$ def. auf höher Dimensionen verallg.

6.2

Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lin. Abb. gegeben durch eine

Matrix A mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$

T bildet den Einheitswürfel $[0, 1]^n$ auf das

Parallelepiped $P = P(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$

ab, der von den Spaltenvektoren aufgespannt wird.



6.3 Lemma

Das von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannte Parallelepiped hat das Vol:

$$V(P(a_1, \dots, a_n)) = |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

