Analysis III   Friedrich Günther   17.12.2015

10.7 Satz: $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ bildet eine Basis von $T_p U$.

Beweis: 1) Die lineare Unabhängigkeit: Wir betrachten die Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$ und deren Bilder in $\mathcal{D}(p)$. Da $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{i,j}$ haben $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathrm{Abb}\{\mathcal{D}(p) \to \mathbb{R}\}$ linear unabhängige Bilder.

2) Erzeugung: Sei $D \in T_pU$ eine beliebige Derivation. $D(x_i) = a_i \in \mathbb{R}$.

Behauptung: $D(x_i) = \sum_{1 \le i \le n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Für $f \in \mathcal{D}(p)$ repräsentiert durch $f: V \to \mathbb{R}$ können wir

$$f(x) = f(p) + \sum_{1 \le j \le n} f_j(x)(x_j - p_j)$$

schreiben, wobei $p = (p_1, \dots, p_n)$ und f_j eine Funktion mit $f_j(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$. In der Tat:

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x-p))\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p + t(x-p))(x_j - p_j)\, dt \\ &= \sum_{1 \le j \le n} (x_j - p_j) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(p + t(x-p))\, dt}_{f_j(x)}, \end{aligned}$$

es ist also $f_j(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$. Dann ist

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{1 \le j \le n} D(f_j)(p_j - p_j) + \sum_{1 \le j \le n} f_j(p) D(x_j - p_j) \\ &= \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\, a_j \\ &= \Big(\sum_{1 \le j \le n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)(f) \end{aligned}$$

$\leadsto D = \sum_{1 \le j \le n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. $\square$

10.8 Bemerkung: 1) Der obige Beweis ist nur korrekt, wenn wir $\mathcal{D}(p)$ Keime von $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen betrachten. Betrachten wir stattdessen $f \in \mathcal{C}^k(V)$ und entsprechende Keime, sind in der Darstellung

$$f(x) = f(p) + \sum_{1 \le j \le n} f_j(x)(x - p_j)$$

die f_j lediglich in $\mathcal{C}^{k-1}(V)$. Will man Derivationen auf den Ring $\mathcal{C}^1(p)$ der Keime von einmal stetig differenzierbaren Funktionen erklären, so muss man die Produktregel durch eine Regel

$$(ii)' \text{ Für } f \in \mathcal{C}^1(p),\ g \in \mathcal{C}^0(p) \text{ mit } f(p) = 0 \text{ sei}$$

$$D(fg) = D(f)\, g(p)$$

ersetzen. Das Resultat sagt dann, dass $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ auch eine Basis der Derivationen auf $\mathcal{C}^1(p)$ gibt ($f, g \in \mathcal{C}^1(p)$, falls $f(p) = 0$).

2) Die Notation $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in T_p U$ ist ungenau, da der Punkt $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ fehlt. Genauer wäre

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p .$$

3) $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ geben eine Basis für $T_q\mathbb{R}^n$ $\forall q \in \mathbb{R}^n$. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist also

$$TU = \dot{\bigcup_{p \in U}} T_p \mathbb{R}^n \cong U \times \mathbb{R}^n ,$$

indem wir $(p, a) \in U \times \mathbb{R}^n$ die Derivationen $a\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \dots + a\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ zuordnen.

4) Sei $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{U}$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\varphi(0) = p$ ist

$$\mathcal{D}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)\Big|_{t=0}$$

eine Derivation; denn

$$\frac{d}{dt}(fg)\circ(\varphi) = \frac{d(f\circ\varphi)}{dt}(g\circ\varphi) + (f\circ\varphi)\frac{d(g\circ\varphi)}{dt}.$$

In Termen der Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in T_p\mathbb{R}^n$ ist diese Derivation durch

$$\varphi_1'(0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \varphi_n'(0)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

nach der Kettenregel gegeben. Zwei Wege $\psi, \varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{U}$ mit $\psi(0) = \varphi(0) = p$ geben also den gleichen Tangentialvektor, wenn $\psi'(0) = \varphi'(0) \in \mathbb{R}^n$ gilt.

<u>10.9</u> Mit Hilfe dieser Definition des Tangentialraums lässt sich die Jacobimatrix neu interpretieren. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in \mathcal{U}$, $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $q \in V$ und

$$F : \mathcal{U} \longrightarrow V$$

eine $\mathcal{C}^\infty$ - Abbildung. Dann definiert

$$F^* : \mathcal{D}(q) \longrightarrow \mathcal{D}(p)$$
$$f \longmapsto f \circ F$$

einen $\mathbb{R}$- Algebren - Homomorphismus. Dieser induziert eine lineare Abbildung

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}f) : T_p\mathcal{U} &\longrightarrow T_q V \\
\partial &\longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(q) \to \mathbb{R} \\ f \longmapsto \partial(f \circ F) \end{array} \right\} =: (\mathcal{D}f)(\partial)
\end{aligned}
$$

10.10 Satz: Sei $F : \mathcal{U} \to V$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen offenen Mengen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_m)$. Es sei $p \in \mathcal{U}$ und $q = F(p) \in V$. Die lineare Abbildung

$$(\mathcal{D}F) : T_p\mathcal{U} \longrightarrow T_q V$$

wird bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ und $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}$ durch die Matrix

$$((\mathcal{D}F)(p)) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

dargestellt.

Beweis: Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ F) = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial F_j}{\partial x_j},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \sum_{1 \leq i \leq m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$\square$

§ 11 – Pfaffsche Formen

<u>11.1 Definition:</u> Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in \mathcal{U}$ und

$$T_p\mathcal{U} = T_p\mathbb{R}^n$$

der Tangentialraum von $\mathcal{U}$ in p. Sein Dualraum

$$(T_p\mathcal{U})^* := T_p^*\mathcal{U} := \mathrm{Hom}(T_p\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

heißt Cotangentialraum, seine Elemente Cotangentialvektoren in p. Die konzeptionelle Definition des Tangentialraums als Derivationen auf $\mathcal{D}(p)$ gibt eine natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} d : \mathcal{D}(p) &\longrightarrow T_p^*\mathcal{U} \\ f &\longmapsto df(p), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} df(p) : T_p\mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \partial &\longmapsto \partial(f). \end{aligned}$$

$df(p)$ heißt Differential der Funktion f im Punkt p. Insbesondere sind für die Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{D}(p)$ die Cotangentialvektoren $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ erklärt.

<u>11.2 Satz:</u> i) $dx_1(p), \dots, dx_n(p) \in T_p^*\mathcal{U}$ bilden die zu $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \in T_p\mathcal{U}$ duale Basis.

ii) Bezüglich dieser Basis hat für $f \in \mathcal{D}(p)$ $df(p)$ die Darstellung

$$(*) \qquad df(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\, dx_1(p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\, dx_n(p).$$

Beweis: i) Nach Definition von

$$d: \mathcal{D}(p) \longrightarrow df(p)$$

gilt $dx_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij}$.

ii) Nach Definition des Differentials $df(p)$ gilt

$$df(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),$$

also haben linke und rechte Seite von (*) auf der Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in T_pU$ die gleichen Werte, sind also gleich.

11.3 Bemerkung: 1) Identifizieren wir $T_pU \cong \mathbb{R}^n$ mithilfe der Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ und weiter $T_pU \cong T_p^*U$ vermöge des euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$, so sehen wir, dass $df(p)$ mit dem Gradienten

$$(\text{grad } f)(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

identifiziert wird. Dies nehmen Forster und Königsberger als Ausgangspunkt für die Definition von Differentialformen.

2) Die anfängliche Schreibweise $dx_i(p)$ erklärt sich durch nachfolgende Definition.

11.4 Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine pfaffsche Form oder 1-Form auf U ist eine Abbildung

$$\omega: U \longrightarrow \dot{\bigcup_{p \in U}} T_p^*U$$

mit $\omega(p) \in T_p^*U$. Jedem Punkt $p \in U$ ordnen wir also einen Kotangentialvektor $w(p) \in T_p^*U$ zu. Bezüglich der Basen $dx_1(p), \ldots, dx_n(p)$ hat $w(p)$ die Darstellung

$$w(p) = f_1(p)\,dx_1(p) + \ldots + f_n(p)\,dx_n(p).$$

w lässt sich also in der Gestalt

$$w = f_1\,dx_1 + \ldots + f_n\,dx_n$$

darstellen, wobei $f_1, \ldots, f_n$ Funktionen auf U sind und

$$dx_i : U \longrightarrow \bigcup_p T_p^*U$$
$$p \longmapsto dx_i(p).$$

$w = f_1\,dx_1 + \ldots + f_n\,dx_n$ heißt Koordinatendarstellung von w. w heißt stetig differenzierbar, $\mathcal{C}^\infty$, usw., falls die Koeffizientenfunktionen f_i diese Eigenschaften haben.

<u>M.S. Definition:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann bezeichnet $\mathcal{C}^\infty(U)$ die Menge der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen und

$$\Omega^1(U) \quad \text{die } \mathcal{C}^\infty\text{-1-Formen}$$

auf U. Für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n$$

das totale Differential oder die 1-Form von f.

<u>Bemerkung:</u> df ist schon für $f \in \mathcal{C}^1(U)$ definiert – mit der gleichen Formel. Die Abbildung

$d: \mathcal{C}^\infty(U) \to \Omega^1(U)$; $f \mapsto df$ heißt äußere Ableitung.

Es gilt

$$d(fg) = g\,df + f\,dg.$$

Beweis: $\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$. $\square$