Analysis III 18. 01. 2016

§ 13 – Höhere Differentialformen

13.1 Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Unter einer Differentialform der Ordnung k (kurz: k-Form) in U versteht man eine Abbildung

$$\omega : U \longrightarrow \dot{\bigcup_{p \in U}} \Lambda^k T_p^* U$$

mit $\omega(p) \in \Lambda^k T^*_p U$. Für $k=1$ erhält man pfaff'sche Formen. Differentialformen der Ordnung 0 sind Funktionen.

13.2 Es seien $x_1, \dots, x_n$ die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Nach 11.2 bilden die Vektoren $dx_1(p), \dots, dx_n(p) \in T_p^* U$ eine Basis, also bilden auch die $dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) \in \Lambda^k T^*_p U$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ eine Basis von $\Lambda^k T^*_p U$. Jede Differentialform lässt sich also eindeutig in der Form

$$(*) \qquad \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

darstellen. Die Darstellung $(*)$ heißt Koordinatendarstellung von ω. ω heißt stetig, (r-mal differenzierbar), falls sämtliche $f_{i_1 \dots i_k}$ stetig (r-mal differenzierbar) sind. Wir verwenden häufig auch die Schreibweise

$$\omega = \sum_{|I| = k} f_I \, dx_I ,$$

wobei $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ alle k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft und $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ bezeichnet.

13.3 Algebraoperationen mit Differentialformen

1) Für $\omega, \tilde\omega$ zwei k-Formen auf U und $f: U \to \mathbb{R}$ Funktion ist $f\omega$ und $\omega + \tilde\omega$ erklärt durch

$$(f\omega)(p) = f(p)\omega(p) \quad ; \quad \omega+\tilde\omega = \omega(p) + \tilde\omega(p).$$

2) ω eine k-Form, η eine l-Form. Dann ist $\omega \wedge \eta$ die $(k+l)$-Form, die durch

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$$

erklärt ist.

13.4 Definition: $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ eine stetig differenzierbare k-Form auf U. Dann ist die $(k+1)$-Form $d\omega$ durch

$$d\omega := \sum_{i_1<\ldots<i_k} df_{i_1\ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

erklärt. $d\omega$ heißt äußere Ableitung von ω.

13.5 Beispiele: 1) Sei $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ eine 1-Form, stetig differenzierbar. Dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^n df_i\, dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

wegen $dx_i \wedge dx_i = 0$ und $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ folgt

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$$

insbesondere ist eine stetig differenzierbare 1-Form ω geschlossen genau dann, wenn $d\omega = 0$.

2) Differentialformen der Ordnung $n-1$: Der Vektorraum $\Lambda^{n-1}T^*_p U$ ist $n = \binom{n}{n-1}$-dimensional. Gelegentlich ist es günstiger, die Basis $(-1)^{(i-1)} dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ zu verwenden, wobei $\hat{dx_i}$ andeutet, dass dieser Faktor ausgelassen wird. Eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form kann man dann auch in der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

schreiben. Sind $f_i : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Da

$$(-1)^{i-1} df_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

folgt, dass

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (\operatorname{div} f)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n ,$$

wobei $f = (f_1, \dots, f_n)$ das zugehörige Vektorfeld bezeichnet.

13.6 Bemerkung: Sowohl 1-Formen, als auch $(n-1)$-Formen werden durch Tupel $(f_1, \dots, f_n) = f$ beschrieben

$$(f_1, \dots, f_n) \mapsto \sum f_i dx_i$$
$$(f_1, \dots, f_n) \to \sum (-1)^{i-1} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n ,$$

unter dieser Identifikation entspricht df dem $\operatorname{grad} f$ und $d\omega$ für eine $(n-1)$-Form der $\operatorname{div}(f_1, \dots, f_n)$. Speziell im Fall $n=3$ entspricht das äußere Differential $d\omega$ einer 1-Form $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_3 dx_3$ zu $f = (f_1, f_2, f_3)$ dem Vektorfeld

$$\operatorname{rot}(f) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right);$$

da

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3$$
$$+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3$$

gilt. Mit Differentialformen ist rot leichter zu merken. Also: die äußere Ableitung verallgemeinert grad, rot und div.

<u>13.7 Satz:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(1) Für ω_1, ω_2 stetig differenzierbare k-Formen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2$$

(2) Für ω stetig differenzierbare k-Form und η stetig differenzierbare l-Form gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

(3) Sei ω 2-mal stetig differenzierbare k-Form. Dann gilt

$$d(d\omega) = 0.$$

<u>Beweis:</u> (1) ist offensichtlich.
(2) Zunächst der Fall $k = l = 0$, $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + \frac{\partial g}{\partial x_i} f,$$

also $d(fg) = df \wedge g + f \wedge dg$, da $\wedge$-Produkt mit Funktionen die Koeffizientenmultiplikation ist.

Allgemein: Seien

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I \, dx_I \, , \quad \eta = \sum_{|J|=l} g_J \, dx_J \, ,$$

also

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} f_I \, g_J \, dx_I \wedge dx_J \, .$$

Dann gilt mit (1) und dem Fall $k=l=0$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} df_I \wedge dg_J \, dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} f_I \, dg_J \, dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} df_I \wedge dx_I \wedge g_J \wedge dx_J + (-1)^k \sum_{I,J} f_I \, dx_I \wedge dg_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \, . \end{aligned}$$

(3) Zunächst der Fall $k=0$. $ddf = d(df)$

$$\begin{aligned} d(df) &= d\Big(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \Big) \\ &= \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big) dx_i \wedge dx_j = 0 \, , \end{aligned}$$

da f zweimal stetig differenzierbar ist. Für $k>0$ ergibt sich dann mit (2)

$$\begin{aligned} d(d\omega) = \sum_{(I)} df_I \wedge dx_I &= \sum \big[\underbrace{d(df_I)}_{=0} dx_I - df_I \wedge \underbrace{d(dx_I)}_{=0} \big] \\ &= 0 \, , \end{aligned}$$

da $d(dx_i) = 0 \;\; \forall i = 1, \dots, n$. $\square$

<u>13.8 Bemerkung</u>: i) $d(d\omega) = 0$ verallgemeinert $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ und $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(f)) = 0$.

2) Eine k-Form ω heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$. ω heißt exakt, wenn es eine $(k-1)$-Form η gibt, mit $d\eta = \omega$. ω geschlossen ist notwendig für ω exakt. Warum Geschlossenheit und Exaktheit interessant sind, wird mit dem Satz von Stokes klarwerden.

13.9 Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : U \to V$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei ω eine Differentialform der Ordnung k auf V, also

$$\omega : V \longrightarrow \dot{\bigcup}_{p \in V} \Lambda^k T_p^* V .$$

Dann ist der Rückzug von ω auf U entlang φ durch

$$\varphi^* \omega : U \longrightarrow \dot{\bigcup}_{p \in U} \Lambda^k T_p^* U$$

durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi^*\omega"] \arrow[d, "\varphi"'] & \dot{\bigcup}_{p \in U} T_p^* U \\
V \arrow[r, "\omega"'] & \dot{\bigcup}_{q \in V} \Lambda^k T_q^* V \arrow[u, "(\Lambda^k D\varphi)^*(p)"']
\end{tikzcd}$$

wobei $(D\varphi)(p) : T_pU \to T_qV$ $(q = \varphi(p))$ und $(^*)$ die duale transponierte Abbildung bezeichnet.

13.10 Satz: Sei $\varphi : U \to V$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, stetig differenzierbare Abbildung und

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le m} f_J \, dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$$

mit $y_1, \dots, y_m$ Koordinaten auf $V \subset \mathbb{R}^m$ eine k-Form.

Dann gilt

$$\varphi^* \omega = \sum_J f_J \circ \varphi \; d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_m},$$

wobei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ Komponenten φ_j hat.

Beweis: $\Lambda^k D\varphi(p)^* : \Lambda^k T_{\varphi(p)} V \to \Lambda^k T_p^* U$ ist eine Komponente des Algebrenhomomorphismus

$$\Lambda D\varphi(p) : \Lambda T^*_{\varphi(p)} V \longrightarrow \Lambda T_p^* U$$

der äußeren Algebren. Dass

$$\varphi^* (dy_j) = d\varphi_j$$

gilt, haben wir in (13.8) gezeigt, also folgt die Formel $\square$

13.11 Bemerkung: 1) Man hat die Formel (+) als Definition des Rückzugs (Forster macht es so).
2) Für 0-Formen f ist $\varphi^* f = f \circ \varphi$

13.12 Beispiel: Sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \to V$ und

$$\omega = \sum_J f_J \, dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_m},$$

dann ist

$$\varphi^*(dy_j) = \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i .$$

Einsetzen und Zusammenfassen gibt dann das Endresultat.
Speziell im Fall $k = n = m$ mit $\omega = f \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ ist

$$\varphi^* \omega = (f \circ \varphi) d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = f \circ \varphi \, (\det D\varphi) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

13.13 Satz Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: \mathcal{U} \to V$ stetig differenzierbar. Dann gilt für k-Formen $\omega_1, \omega_2, \omega$ auf $\mathcal{U}$ und eine l-Form η auf V und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $\varphi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda\varphi^*\omega_1 + \mu\varphi^*\omega_2$;
2) $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta$.

Ist ω stetig differenzierbar und φ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

3) $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$.

Ist $\psi: V \to \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^k$ eine weitere stetig differenzierbare Abbildung, dann gilt

$$\psi^*(\varphi^*\omega) = (\psi \circ \varphi)^*\omega.$$

__Beweis:__ (1) und (2) sind klar, da der Rückzug über den Algebrahomomorphismus

$$\Lambda T_q^* V \longrightarrow \Lambda T_p^* \mathcal{U} \qquad (q = \varphi(p))$$

definiert ist. (4) ist ebenfalls klar, da

$$\Lambda T^*_{\psi(q)} \mathcal{W} \longrightarrow \Lambda T_q^* V \longrightarrow \Lambda T_p^* \mathcal{U}$$

durch die Komposition $D\psi(\varphi(p)) \circ D\varphi(p) = D(\psi \circ \varphi)(p)$ gegeben ist.

(3): Ist $\omega = \sum_I f_I \, dx_I$, dann gilt $d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I$ und die Regeln (1) und (2) ergeben, dass

$$\varphi^*(d\omega) = \sum_{|I|=k} \varphi^*(df_I) \wedge \varphi^* dx_I = \sum_{|I|=k} \varphi^*(df_I) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Andererseits ist

$$\psi^*\omega = \sum f_J \circ \psi \; \psi^* dy_J = \sum f_J \circ \psi \; d\psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_k},$$

also

$$\begin{aligned} d(\psi^*\omega) &= \sum_J [d(f_J \circ \psi)\, d\psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_k} \\ &\qquad + f_J \circ \psi \underbrace{d(d\psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_k})}_{=0, \text{ da } \psi \text{ 2mal stetig differenzierbar}}] \\ &= \sum_J \psi^* d f_J \wedge d\psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_k}; \end{aligned}$$

da $\psi^* d f_J = d(\psi^* f_J)$, was wir in § 11 eingesehen haben.

$\square$