

Analysis III

Beweis: Die Abbildung

$$g = \det: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-Fach}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

ist durch folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt

$$(D1) \quad g(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = |\lambda| g(a_1, \dots, a_n)$$

$$(D2) \quad g(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \text{ für } i \neq j$$

$$(D3) \quad g(e_1, \dots, e_n) = 1$$

Wobei $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$, die kanonischen Basisvektoren von \mathbb{R}^n bezeichnet.

Durch diese ~~definiert~~: Spaltenoperationen

1) Multiplikation einer Spalte mit $\lambda \neq 0$

2) Addition einer Spalte zu einer anderen, dann

lässt sich jede invertierbare Matrix in die Einheitsmatrix

transformieren und daher $g(A)$ mit den Regeln (D1), (D2),

(D3) berechnen. Für linear abhängige a_1, \dots, a_n ergibt sich

$$g(a_1, \dots, a_n) = 0$$

aus (D1) und (D2). Wir zeigen das nun noch wir nachweisen, dass die Abbildung

$$\tau: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \tau(\tau(a_1, \dots, a_n))$$

und die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) erfüllt.

\mathfrak{D}_3 ist klar. Da zeigen wir in 3+1 Schritten:

a) Für $\lambda \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zeigen wir dies durch vollständige Induktion.

Sei nun Parallelstop $P_\lambda = p(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Dann gilt

$$v(P_\lambda) = \lambda v(P_1).$$

Da $P_{\lambda+1} = P_\lambda \cup (\lambda a_i + P_1)$ und $P_\lambda \cap \{\lambda a_i + P_1\}$ in einer Hyperebene liegt, also eine Nullmenge ist, folgt

$$v(P_{\lambda+1}) = v(P_\lambda) + v(P_1)$$

aus der Translationssvariant des Volumens

$$\begin{aligned} &= \lambda v(P_1) + v(P_1) \\ &= (\lambda + 1) v(P_1). \end{aligned}$$

b) $\lambda = p/q \in \overline{\mathbb{Q}}_{>0}$

$$q v(P_\lambda) = v(P_{pq}) - v(P_p) = pr(P_q)$$

also $v(P_{pq}) = p/q v(P_1)$.

c) Für $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir rationale Zahlen $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{Q}}_{>0}$ mit $r_1 < \lambda < r_2$. Aus $P_{r_1} \subset P_\lambda \subset P_{r_2}$ und der Monotonie folgt, dass

$$r_1 v(P_1) \leq v(P_\lambda) \leq r_2 v(P_1).$$

Da wir $r_2 - r_1$ beliebig klein machen können folgt

$$v(P_\lambda) = \lambda v(P_1).$$

d) $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}$: P_0 ist in einer Hyperebene enthalten, also

$$v(P_0) = 0.$$

Für $\lambda < 0$: Es gilt

$$P_{-\lambda} + \lambda P_0 = P_\lambda,$$

also wegen der Translationssvarianz gilt

$$v(P_\lambda) = v(P_{-\lambda}) = -\lambda v(P_0) = |\lambda| v(P_0).$$



Nachweis von (D2): Wir betrachten

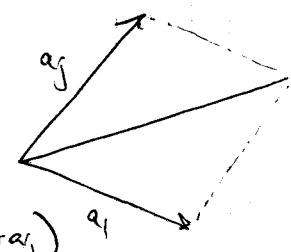
$$\Delta^{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^n t_k a_k \mid t_i \leq t_j \right\} \text{ für } i \neq j.$$

Dann gilt

$$P(a_1, \dots, a_n) = \Delta^{1j} \cup \Delta^{i1}$$

und

$$P(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \Delta^{ij} + (\Delta^{i1} + a_j),$$



$$\begin{aligned} \text{also } v(P(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)) &= v(\Delta^{ij}) + v(\Delta^{i1} + a_j) \\ &= v(\Delta^{ij}) + v(\Delta^{i1}) \\ &= v(P(a_1, \dots, a_n)), \end{aligned}$$

da die Schwartz Nullvektoren sind. □

Einführung: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Diffeomorphismus

$$T: U \rightarrow V$$

ist eine stetig differenzierbare bijektive Abbildg. deren Umkehrabbildg. T^{-1} wieder stetig differenzierbar ist. Für die Jacobimatrizen gilt in $x \in U$ und $y = T(x) \in V$:

$$DT^{-1}(y) = (DT)(x)^{-1}.$$

6.4 Satz (Transformationssatz): Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion f auf V ist genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion

$$(f \circ T) \cdot |\det DT|: U \rightarrow \mathbb{R}$$

über U integrierbar ist und dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_U f(T(x)) |\det(DT(x))| dx \\ = \int_V f(y) dy \end{aligned}$$

6.5 Richtigkeit der Formel:

Wir approximieren U durch eine endliche Vereinigung über Quadrate Q_k , dann ist

$$v(U) \approx \sum_{k=1}^m v(Q_k), \quad U \approx \bigcup Q_k,$$

umgekehrt ist $V = T(U) \approx \bigcup_{k=1}^m T(Q_k)$. Für kleine Quadrate Q_k kann sich $T|_{Q_k}$ durch die Ableitung $(DT|_{Q_k})$ an einen Punkt $x_k \in Q_k$ approximieren.

$$T(Q_k) \approx (DT(x_k))(Q_k) + T(x_k) = P_k$$

und P_k ist ein verschobener Parallelotop mit Volumen

$v(P_k) = |\det(BT(x_k))| \cdot v(Q_k)$. Schließlich brauchen wir noch

$$f \approx \sum f(T(x_k)) 1_{P_k},$$

also

$$\begin{aligned} \int_U f(y) dy &\approx \sum f(T(x_k)) v(P_k) \\ &= \sum f(T(x_k)) \cdot |\det BT(x_k)| \cdot v(Q_k) \\ &\approx \int_U f(T(x)) \cdot |\det BT(x)| dx. \end{aligned}$$

6.6 Beispiel (Polarkoordinaten): Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

φ induziert einen Diffeomorphismus von

$$U = [0, \infty] \times [0, 2\pi] \rightarrow V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = 0\}$$

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann über \mathbb{R}^2 integrierbar, wenn sie über V integrierbar ist, das ist der Fall genau dann wenn für f gilt:

$$f(\varphi(r, \varphi)) \cdot |\det D\varphi(r, \varphi)|$$

über U integrierbar ist.

$$D\varphi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$|\det D\varphi(r, \varphi)| = r \geq 0$$

Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, deren Werte nur von $r = \|x, y\|_2$ abhängen ergibt sich also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r) r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(r) r dr.\end{aligned}$$

Beispiel: Betrachte $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2}$. Das Integral

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Wichtig in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, da

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

die Gaußsche Normalverteilung beschreibt.

Der Beweis der Transformationssregel führen wir in mehreren Schritten:

- 1) Für Trigonometrische Funktionen,
- 2) für beliebige Funktionen.

In beiden Schritten verwenden wir, dass die Bilder von Nullvektoren unter Diffeomorphen Nullvektoren sind.

G.H Lemma: Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $T: N \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, dann ist $T(N)$ eine Nullmenge.

Bew: Es gilt also eine Konstante $L > 0$, so dass

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty$$

Für jeden Würfel $W \subset \mathbb{R}^n$ liegt das Bild $T(W)$ in einem Würfel von Volumen $(2L)^n v(W)$. Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da N eine Nullmenge ist existiert ein Überdeckung durch Würfel W_k mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \epsilon.$$

Da das gilt $T(W_k \cap N)$ in einen Würfel $(2L)^n v(W_k)$ liegt folgt, dass $T(N)$ durch Würfelkette von Gesamtvolumen

$$\sum_i v(W'_i) = \sum_i (2L)^n v(W_k) \leq (2L)^n \epsilon$$

überdeckt wird. Da $\epsilon > 0$ folgt: $T(N)$ ist Nullmenge.

