

6. Transformationsformel

6.1 Motivation

In diesem Kapitel wollen wir die Substitutionsregel
 $\int_{p(a)}^{p(b)} f(x) dx = \int_a^b f(p(t)) p'(t) dt$, $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
diff'bar, f stetig, $f \circ p$ definiert auf höhere Dimensionen
übertragen.

6.2 Lemma

Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung gegeben durch
eine Matrix A mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$.

T bildet den Einheitswürfel $[0, 1]^n$ auf das Parallelotop

$$P = P(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ ab,}$$

das von den Spaltenvektoren aufgespannt wird.

Beweis: Klar!

hat "Ecken" $a_1, \dots, a_n$

6.3 Lemma

Das von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannte Parallelotop hat das
Volumen $V(P(a_1, \dots, a_n)) = |\det(a_1, \dots, a_n)|$.

Beweis: Die Abbildung $D = |\det|: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_n \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(a_1, \dots, a_n) \mapsto |\det(a_1, \dots, a_n)|$ ist durch folgende
Eigenschaften eindeutig bestimmt.

$$(D1) \quad D(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = (\lambda) D(a_1, \dots, a_n)$$

$$(D2) \quad D(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

$$(D3) \quad D(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

wobei $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Dies ist der Fall, da durch elementare Spaltenoperationen

(1) Multiplikation einer Spalte mit $\lambda \neq 0$

(2) Addition einer Spalte zu einer anderen

jede invertierbare Matrix sich in die Einheitsmatrix überführen lässt.

Für linear abhängige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich $D(a_1, \dots, a_n) = 0$ aus (D1) und (D2).

Wir zeigen das Lemma, indem wir nachweisen,

dass $V(P(\cdot)): \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$(a_1, \dots, a_n) \mapsto V(P(a_1, \dots, a_n))$ auch D_1, D_2, D_3 erfüllt.

D_3 ist klar.

D_1 zeigen wir in 2 Schritten:

a) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zeigen wir durch vollst.

Induktion ($P_n = (a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, \dots, a_n)$):

$$V(P_n) = \lambda P_1$$

Da $P_{n+1} = P_n \cup (\lambda a_i + P_1)$



und da $P_n \cap \{\lambda a_i + P_1\}$ in einer Hyperebene liegt, also eine Nullmenge ist, folgt

$$V(P_{n+1}) = V(P_n) + V(P_1)$$

aus der Translationsinvarianz des Volumens

$$\text{und } V(P_n) + V(P_1) = \lambda V(P_1) + V(P_1) \\ = (\lambda + 1) V(P_1)$$

b) $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$,

$$q V(P_n) = V(P_{qn}) = V(P_p) = p V(P_1),$$

$$\text{also } V(P_{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} V(P_1)$$

c) Für $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir rationale Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $r_1 < \lambda < r_2$.

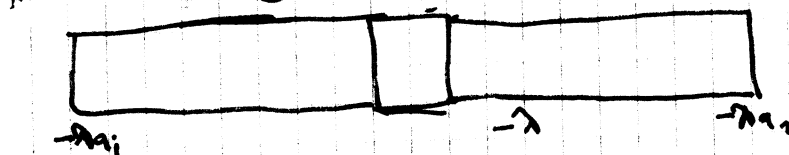
Aus $P_{r_1} \subset P_n \subset P_{r_2}$ und Monotonie folgt

$$r_1 V(P_1) \leq V(P_n) \leq r_2 V(P_1).$$

Da wir $r_2 - r_1$ beliebig klein wählen können folgt: $V(P_n) = \lambda V(P_1)$.

d) $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}$: P_0 ist in einer Hyperräumebene enthalten, also $V(P_0) = 0$

Für $\lambda < 0$ gilt: $P_{-\lambda} + \lambda a_1 = P_n$



Wegen der Translationsinvarianz gilt:

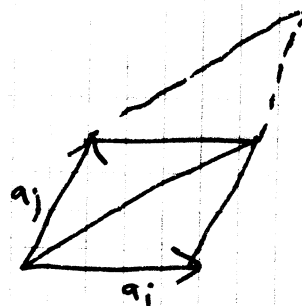
$$V(P_n) = V(P_{-\lambda}) = -\lambda V(P_1) = |\lambda| \cdot V(P_1)$$

Nachweis von (D2):

$$\Delta^{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^n t_k a_k \mid t_i \leq t_j \right\} \quad i \neq j$$

Dann gilt:

$$P(a_1, \dots, a_n) = \Delta^{ji} \cup \Delta^{ji}$$



$$\begin{aligned} P(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ = \Delta^{ji} + (\Delta^{ji} + a_j), \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} V(P(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)) \\ = V(\Delta^{ji}) + V(\Delta^{ji} + a_j) \\ \xrightarrow{\text{translation-invariant}} = V(\Delta^{ji}) + V(\Delta^{ji}) \\ = V(P(a_1, \dots, a_n)), \end{aligned}$$

da die Durchschnitte Nullmengen sind.

□

6.4 Erinnerung

U, V seien offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Ein Diffeomorphismus $T: U \rightarrow V$ ist eine stetig diff'bare, bijektive Abbildung.

Die Umkehrabbildung $T^{-1}: V \rightarrow U$ ist dann ebenfalls stetig diff'bar und für Jacobimatrizen in $x \in U$ und $y = T(x) \in V$ gilt:

$$D(T^{-1})(y) = (DT(x))^{-1}$$

6.5 Satz (Transformationsformel)

Seien U und V offene Teilmenge und $T: U \rightarrow V$

ein Diffeomorphismus.

Eine Funktion f auf V ist genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ T) \cdot |\det DT|$ $(f \circ T) \cdot |\det DT|: U \rightarrow \mathbb{R}$ über U integrierbar ist und dann gilt:

$$\int_U f(T(x)) |\det DT(x)| dx = \int_V f(y) dy$$

6.6 Plausibilität der Formel

Wir approximieren V durch eine endliche Vereinigung kleiner Quader Q_k

$$V(U) \approx \sum V(Q_k) \quad \text{bzw. (1)} \quad U \approx \bigcup Q_k$$

$$\Rightarrow (2) \quad V = T(U) \approx \bigcup T(Q_k)$$

Für kleine Quader Q_k lässt sich $T|_{Q_k}$ durch Ableitung in $x_k \in Q_k$ approximieren

$$(3) \quad T(Q_k) \approx DT(x_k)(Q_k) + T(x_k) = P_k$$

und P_k ist ein verschobenes Parallelotop mit Volumen $V(P_k) = |\det DT(x_k)| V(Q_k)$

$$\text{Schließlich } f \approx \sum f(T(x_k)) \mathbb{1}_{P_k}.$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \int_V f(y) dy &\approx \sum f(T(x_k)) V(P_k) \\ &= \sum f(T(x_k)) \cdot |\det DT(x_k)| \cdot V(Q_k) \\ &\approx \int_U f(T(x)) \cdot |\det DT(x)| dx \end{aligned}$$

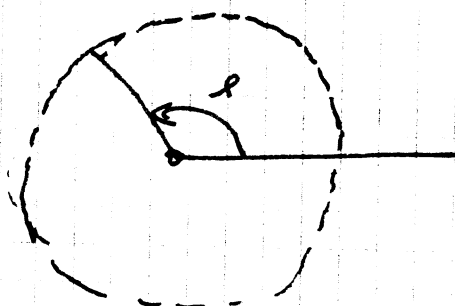
6.7 Beispiel (Polarkoordinaten)

Wir betrachten die Abbildung

$$P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

P induziert einen Diffeomorphismus von

$$U =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\}$$



Da $N = \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\}$ eine Nullmenge ist, ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann über $\mathbb{R}^2$ integrierbar, wenn sie über V integrierbar ist und dies ist der Fall genau dann, wenn

$f(P(r, \varphi)) \cdot |\det(DP(r, \varphi))|$ über V integrierbar ist.

$$DP(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \text{ also } \det(DP(r, \varphi)) = r > 0$$

Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deren Werte nur von $r = \|(x, y)\|_2$ abhängen, ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r) d(r, \varphi) \\ &= 2\pi \int_0^\infty r f(r) dr \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr$$

$$= [\pi(-e^{-r^2})]_0^\infty = \pi$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Wichtig in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik,
da $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx$ die Gaußsche
Normalverteilung beschreibt

Den Beweis der Transformationsformel führen wir
in 2 Schritten:

- 1.) Für Treppenfunktionen
- 2.) Für beliebige Funktionen

↳ beiden Schritten Nullmengen sind.

6.8 Lemma

Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $T: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine
Lipschitz-stetige Abbildung, dann ist $T(N)$ eine Nullmenge

Beweis: Es gibt also eine Konstante $L > 0$, sodass

$$\|T(x) - T(y)\|_{\infty} \leq L \|x - y\|_{\infty}$$

Für jeden Würfel $W \subset \mathbb{R}^n$ liegt das Bild
 $T(W \cap V)$ in einem Würfel von Volumen
 $(2L)^n \cdot V(W)$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Da N eine Nullmenge ist, existieren eine Überdeckung durch einen Würfel W_k mit $\sum V(W_k) < \varepsilon$.

Da das Bild $T(W_k \cap N)$ in einen Würfel von Volumen $(2L)^n \cdot V(W_k)$ folgt, dass $T(N)$ durch Würfel V_k' mit Gesamtvolumen

$$\sum V(W_k') = \sum (2L)^n \cdot V(W_k) < (2L)^n \cdot \varepsilon$$
 überdeckt wird.

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow T(N)$ ist Nullmenge.

□