§ 14 – Integration von Differentialformen

Der natürliche Integrationsbereich für k-Formen auf $U \subset \mathbb{R}^n$ sind (Teilmengen) von k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $M \subset U$.
Wir erklären zunächst das Integral einer n-Form.

14.1 Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ eine n-Form. $\omega$ heißt integrierbar über eine Teilmenge $A \subset U$, wenn $f|A$ Lebesgue-integrierbar ist. Wir setzen

$$\int_A \omega = \int_A f(x)\, d^n x.$$

Also: stetige n-Formen über Kompakta sind integrierbar.

14.2 Definition: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Ist $\varphi$ stetig partiell differenzierbar und $\det(D\varphi)(x) \neq 0$ $\forall x \in U$. $\varphi$ heißt orientierungstreu, wenn $\det(D\varphi)(x) > 0$ $\forall x \in U$, orientierungsumkehrend, wenn $\det(D\varphi)(x) < 0$ $\forall x \in U$.

14.3 Bemerkung: Ist $U$ wegzusammenhängend, dann ist $\varphi$ entweder orientierungstreu oder orientierungsumkehrend. Für $x, x' \in U$, $\alpha : [0,1] \to U$ der Weg von $x$ und $x'$ ist

$$\det(D\varphi)(\alpha(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

und der Zwischenwertsatz sagt, dass $\det(D\varphi)(x)$ und $\det(D\varphi)(x')$ das gleiche Vorzeichen haben.

14.4 Satz: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: U \to V$ ein Diffeomorphismus, $\omega$ eine stetige $n$-Form auf $V$ und $A$ eine kompakte Teilmenge von $U$. Dann gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega,$$

falls $\varphi$ orientierungserhaltend und

$$\int_{\varphi(A)} \omega = -\int_A \varphi^* \omega,$$

wenn $\varphi$ orientierungsumkehrend ist.

Beweis: Sei $\omega = f(y)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$. Dann haben wir

$$\varphi^* \omega = f \circ \varphi \det(D\varphi)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

andererseits sagt die Transformationsregel für Lebesgue-Integrale

$$\int_{\varphi(A)} f(y)\, d^n y = \int_A (f \circ \varphi)(x) |\det(D\varphi)(x)|\, d^n x$$

$\square$

14.5 Wir haben nun alles zusammen, um das Integral einer $k$-Form auf $U$ über eine Teilmenge $A \subset M \subset U$ einer $k$-Untermannigfaltigkeit $M$ zu erklären. Mit Hilfe der Zerlegung der 1 auf $M$ und den Rückzug entlang von Parametrisierungen $\varphi_i : U_i \to V_i \subset M \subset \mathbb{R}^n$ von Kartengebieten lässt sich das Integral erklären.

Allerdings muss man wegen den unterschiedlichen Vorzeichen in 14.4 sich auf Karten eines orientierten Atlas beschränken.

11.6 Erinnerung: Eine $k$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammen mit einem Atlas

$$\{\varphi_i^{-1} : V_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^k\}_{i \in I}$$

von Teilmengen $V_i \subset M$, so dass alle Übergangsabbildungen

$$\varphi_{1,2} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{W_1} : W_1 \longrightarrow W_2$$

Diffeomorphismen sind und $\bigcup_{i \in I} V_i = M$ gilt. Man nennt die Kartenparametrisierungen $\varphi_1, \varphi_2$ orientierungsverträglich, wenn die Übergangsabbildungen orientierungserhaltend sind. Ein orientierter Atlas ist ein Atlas aus orientierungsverträglichen Karten. Eine Orientierung $o$ einer Mannigfaltigkeit $M$ ist Äquivalenzklasse von orientierungsverträglichen Atlanten. Zwei Atlanten $A_1, A_2$ sind orientierungsverträglich, wenn auch $A_1 \cup A_2$ ein orientierter Atlas ist.

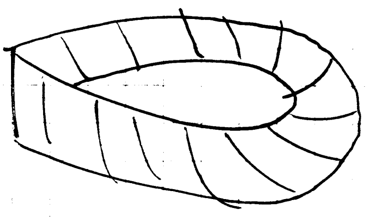
11.7 Beispiele: a) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ das Bild einer einzigen Parametrisierung $\varphi : U \to V = M$, so ist $M$ orientiert.

b) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit überall glatten Rand, dann ist $\partial K$ eine orientierbare $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

c) Jede eindimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist orientierbar.

a) b) c) erklären, warum Sie verblüfft sind, wenn Sie eine nicht-orientierbare Untermannigfaltigkeit zum ersten Mal sehen.

d) Das Möbiusband ist nicht orientierbar.



**4.8 Satz:** Sei $M$ eine $k$-dimensionale differenzierbare wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann besitzt $M$ genau 2 oder keine Orientierung.

**Beweis:** Sei $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}$ Atlas aus Kartenparametrisierungen der orientiert ist, und $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k)$. Dann gilt $i \circ i = id_{\mathbb{R}^k}$. Sei $\varphi : U \to V$ eine Kartenparametrisierung, dann gilt $\varphi \circ i : i(U) \to V$ eine Karte, mit der $\varphi$ nicht verträglich ist, also

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\varphi \circ i \mid \varphi \in \mathcal{A}\}$$

ist ein zweiter Atlas, der ebenfalls orientiert ist,

$$(\varphi_k \circ i)^{-1}(\varphi_j \circ i) = i(\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j)_j$$

ist orientierungsverträglich. Ist $\varphi : U \to V$ eine beliebige weitere Kartenparametrisierung mit $U$ wegzusammenhängend, dann ist $\varphi$ entweder mit $\mathcal{A}$ oder $\tilde{\mathcal{A}}$ verträglich, deshalb genau 2 Orientierungen. $\square$

Wir schreiben $(M, \sigma)$ für eine orientierte $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Die Karten $\varphi$, die mit $\mathcal{A}$ orientierungsverträglich sind, nennt man positiv orientiert, die $\varphi$, die mit $\tilde{\mathcal{A}}$ orientierungsverträglich sind, nennt man negativ orientiert.

11.9 Wir schreiben jetzt $G \subset \mathbb{R}^n$ für offene Mengen in $\mathbb{R}^n$, damit wir $G$ mit den $\mathcal{U}$'s, die in den Karten auftauchen, nicht verwechseln.

$\omega$ sei eine stetige $k$-Form auf $G$ und $M \subset G$ eine differenzierbare $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\sigma$ eine Orientierung und $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge.

a) Ist $A$ im Bild $V$ einer parametrisierten orientierten Karte $\varphi : \mathcal{U} \to V$ enthalten, dann definieren wir

$$\int_{(A,\sigma)} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega .$$

ist $\psi$ eine weitere solche Karte, dann gilt

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega = \int_{\psi^{-1}(A)} \psi^* \omega$$

wegen der Transformationsregel.

b) Ist $A$ nicht in einer solchen Karte enthalten, so verwenden wir die Zerlegung der 1: Eine Familie $(\alpha_j)_{1 \le j \le m}$ seien stetige Funktionen $\alpha_j : M \to [0,1]$ mit

1) $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1 \ \forall x \in A$,

2) Zu jedem $j$ existiert eine positiv orientierte Karte $\varphi_j : \mathcal{U}_j \to V_j \subset M$, so dass

$$A_j = A \cap \operatorname{supp}(\alpha_j) \subset \mathcal{U}_j ,$$

wobei $\operatorname{supp}(\alpha_j) = \overline{\{x \in M \mid \alpha_j(x) \neq 0\}}$ und setzen

$$\int_{(A,\sigma)} \omega = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{A_j} \alpha_j \omega}_{\text{nach a) definiert}}.$$

Wie in §8 zeigt man, dass dieses Integral wohldefiniert ist.

<u>14.10 Bemerkung:</u> 1) In der Praxis geht man bei der Berechnung der Integrale etwas anders vor: Statt einer Zerlegung der 1 verwendet man eine Zerlegung $\varphi_j : U_j \to V_j$ in disjunkte Kartengebiete, so dass $U_j$, $V_j$ und $M$ bis auf je einer k-Nullmenge übereinstimmen. Dann gilt

$$\int_{(A,\sigma)} \omega = \sum_{j=1}^{l} \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi_j^* \omega.$$

2) Ist klar, welche Orientierung gewählt ist, lassen wir $\sigma$ weg und schreiben $\int_A \omega = \int_{(A,\sigma)} \omega$, weiter gilt $\int_{(A,\sigma)} \omega = - \int_{(A,-\sigma)} \omega$.

3) Ist $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\varphi : I \to V \subset M$ eine Karte, $\omega$ 1-Form auf $G$, so ist mit $[a,b] \subset I$

$$\int_{\varphi([a,b])} \omega = \int_{[a,b]} \varphi^* \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,dt,$$

man kann also allgemeiner $\varphi$ mit Singularitäten erlauben. In höheren Dimensionen könnten wir statt $M$ Mannigfaltigkeit auch über Teilmengen, die außerhalb einer k-Nullmenge Mannigfaltigkeiten sind, integrieren.

4) Im Gegensatz zu Oberflächenintegralen wird bei Integralen von Differentialformen auf die Metrik des $\mathbb{R}^n$ (etwa über die Gram'sche Determinante der Parametrisierung) kein Bezug genommen, wir haben also weniger Struktur des $\mathbb{R}^n$ verwendet. Wir können also k-Formen über abstrakten differenzierbaren orientierbaren Mannigfaltigkeiten auch integrieren. Die Frage, welche Zusatzstruktur durch die Metrik auf $\mathbb{R}^n$ auf einer Untermannigfaltigkeit eingeführt wird, ist Gegenstand der Differentialgeometrie, die Riemann eingeführt hat.

Wir wollen jetzt die Orientierbarkeit von Hyperflächen, etwa den Rand $\partial K$ einer Kompaktums $K \subset \mathbb{R}^n$ mit glatten Rand, besser verstehen. Dazu zwei Definitionen:

14.11 Definition (Orientierung von Tangentialvektoren): Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Die Basis heißt positiv orientiert, wenn $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$, wobei wir die $v_j$ als Spaltenvektoren auffassen.

14.12 Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, also eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $p \in M$ ist $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Sei $\varphi: U \to V$ orientierte Karte, $\mathbb{R}^{n-1} \cong T_pU \xrightarrow{(D\varphi)(p)} T_pM \subset \mathbb{R}^n$. Ein Einheitsnormalenvektor $\nu(x)$ ist ein normierter Vektor mit $\nu(x) \perp T_pM$.
$\nu(x)$ heißt positiv orientiert, wenn die Bilder $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ der Tangentialvektoren auf $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ zusammen mit $\nu(x)$ eine orientierte Basis $(\nu(x), v_1, \dots, v_{n-1})$ von $\mathbb{R}^n$ bilden

Die Vektoren verstehen sich in Koordinaten $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$.
Ist umgekehrt $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ ein normiertes Normalenvektorfeld, dann gibt die Bedingung $\det(\nu(x), v_1, \ldots, v_{n-1}) > 0$ eine Bedingung an die Karten und spezifiziert einen orientierten Atlas.