

1. Definition des Lebesgue Integrals

1.1. Motivation des Vorgehens

Bei der Definition des Riemann-Integrals hatten wir die zu integrierende Fkt. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Folge (φ_k) von Treppenfkt. $\varphi_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig approximiert, etwa sodass

$$\|f - \varphi_k\|_{\infty} = \sup \{ |f(x) - \varphi_k(x)| \mid x \in [a, b] \} < \varepsilon_k$$

und dann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k(x) dx$$

gesetzt, wobei das Int. von Treppenfkt. elementar definiert war. In gewisser Weise ist glm. Approx.

durch Treppenfkt. eine viel zu starke Forderung.

Angemessener wäre eine Approx. im Sinne der L^1 -

Norm: $\|f - \varphi_k\|_1 = \int_a^b |f - \varphi_k| dx < \varepsilon_k$.

Für den Aufbau der Integrations-theorie ist dies

nicht so ohne weiteres möglich, da zur Def. bereits

das Int. für die L^1 -Norm verwendet wird. Beim

Lebesgue-Int. umgehen wir diese Schwierigkeit ge-

schickt. Wir gehen beim R-Int. von Trp. Fkt. aus und

approx. aber in einem anderen Sinne.

Ex.: Integration auf ganz $\mathbb{R}^n$.

1.2. Definition

Unter einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir ein Produkt $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ von beschränkten, nicht leeren Intervallen, die (halb-) offen, abg. oder einpunktig sein dürfen.

Das Volumen des Int. I_j mit Randpunkten a_j, b_j

ist $v(I_j) = b_j - a_j$ und

$$v(Q) = v_n(Q) = v(I_1) \cdot \dots \cdot v(I_n).$$

Ausgeartete Quader, d.h. Quader, die in einer Hyper-ebene liegen, haben $\text{Vol} = 0$.

1.3. Definition

Eine Trip. Fkt $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Fkt, für die es endlich viele disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_N$ gibt, sodass

- (i) φ ist auf jedem Q_i konstant
- (ii) φ ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i \equiv 0$.

1.4. Bemerkung

- 1) Die Menge der Trip. Fkt. bildet einen $\mathbb{C}$ -VR, denn die Vereinigung von endlich vielen Quadern lässt sich auch als Vereinigung von endl. vielen disjunkten Quadern darstellen:



Mit φ ist auch $i\varphi$ eine Trip. Fkt.

- 2) Zu $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die char. Fkt.

$$\chi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

durch:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Treppenfkt. lassen sich als $\mathbb{C}$ -lin. Komb. von char.

Fkt. schreiben von Quadern:

$$\varphi = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{Q_k}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

1.5. Definition

Das Int. einer Trip. Fkt. $\varphi = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{Q_k}$ definieren wir als

$$\int \varphi \, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx := \sum_{k=1}^N c_k \text{Vol}(Q_k)$$

1.6. Satz

Das Int. von Trip. Fkt. hängt nicht von der Wahl der Darstellung ab, im Sinne von χ_{Q_k} .

Ferner gelten:

(i) „Linearität“

$$(i) \int \varphi(x) dx \leq \int \psi(x) dx$$

(iii) Sind φ, ψ reellwertig $\varphi \leq \psi$ dann gilt:

$$\int \varphi(x) dx \leq \int \psi(x) dx$$

Beweis: (i), (ii), (iii) ist einfach.

Um die Wohldef. des Int. einzusehen verwenden wir Induktion nach n .

$n=1$: Aus I.

$n > 1$: Wir zerlegen $\mathbb{R}^n = X \times Y$ mit $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^{n-p}$, mit $0 < p < n$. Jeder Quader zerlegt sich in analog ($Q \subset \mathbb{R}^n, Q = Q' \times Q'', n, X \times Y, Q' \subset X, Q'' \subset Y$ und es gilt für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n = X \times Y$:

$$T_Q(z) = T_{Q'}(x) \cdot T_{Q''}(y).$$

Für festes $y \in Y$ ist $\varphi_y = \sum_{k=1}^s c_k T_{Q_k''}(y) \cdot T_{Q_k'}$ eine Fkt. auf $X = \mathbb{R}^p$. Das Int von φ_y über X ist wohldef. und $\tilde{\varphi}(y) = \int_X \varphi_y(x) dx = \sum c_k T_{Q_k''}(y) \cdot \nu(Q_k')$. Also $\tilde{\varphi}: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Treppenfkt. und deren Int. hat den wohldef. Wert

$$\int_Y \tilde{\varphi}(y) dy = \sum_{k=1}^s c_k \nu(Q_k') \cdot \nu(Q_k'') = \sum_{k=1}^s c_k \nu(Q_k).$$

Da $\varphi_y(x) = \varphi(x, y)$ nicht von der Darstellung von φ abhängt, hängt auch $\tilde{\varphi}$ nicht davon ab. $\square$

1.2. Korollar (Fubini)

Mit Bezeichnungen wie im Beweis gilt für

$$\varphi = \sum c_k T_{Q_k}: \int_{X \times Y} \varphi(x, y) d(x, y) = \int_X \int_Y \varphi(x, y) dy dx \quad \square$$

1.3. Bemerkung

Im Folgenden werden wir Fkt. und Reihen mit Werten in $\mathbb{C}$ betrachten. Für die Rechnen mit ∞ machen wir keine GV betrachtungen, sondern ver-

Einbaren:

$$|\infty| = \infty, \quad \overline{\infty} = \infty, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\infty + c = c + \infty = \infty \quad \forall c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty \quad \forall c \in \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$$

$$\infty \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \infty$$

Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent setzen mit $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$

1.3 Definition

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Fkt. Eine Hüllreihe zu f ist eine Reihe:

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 1_{Q_k}$$

mit folg. Eigenschaften.

1) $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ sind offene Quader und die $c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 1_{Q_k}(x).$$

Der Inhalt einer Hüllreihe ist:

$$I(\tilde{f}) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \nu(Q_k).$$

1.10 Bemerkung

Jede Fkt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hat eine Hüllreihe, z.B.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}(x) = \infty. \text{ Allerdings gilt auch } I(\tilde{f}) = \infty.$$

wobei Q_k sind Quader mit
Kantenlänge k und $M_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$

1.11 Definition

Die L^1 -Halbnorm einer Fkt. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

ist $\|f\|_1 := \inf \{ I(\tilde{f}) \mid \tilde{f} \text{ ist Hüllreihe von } f \}$.

Dann ist $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L^1 erfüllt nicht alle Regeln einer Norm:

$$\|f\|_1 = 0 \not\Rightarrow f = 0.$$

Zum Beispiel:

A ist ausgearteter Quader gilt $\|1_A\|_1 = 0$

In der Tat zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists$ offener Quader Q mit $A \in Q$ und $\nu(Q) < \varepsilon$.

$\tilde{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau_{Q_k}$, mit $c_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, ist eine Hüllreihe. $I(\tilde{Q}) = \nu(Q) < \varepsilon \Rightarrow \|1_A\|_1 = 0$.

Ansonsten gelten die Regeln für Normen.

1.12 Rechenregeln

$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} := \mathbb{C}^+$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$1) \|c \cdot f\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$$

$$2) \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$$3) |f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_1 \leq \|g\|_1$$

Beweis: 1) und 3) sind elementar. 2) gilt allg.

Auf $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ lässt sich folgendes anwenden

1.13. Satz

Für eine Folge $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von nicht neg.

Fkt. gilt: $\|\sum f_k\|_1 = \sum \|f_k\|_1$.

Beweis: Nur im Fall: $\sum \|f_k\|_1 < \infty$ ist etwas zu zeigen.

Sei dies vorausgesetzt und $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$. Es gilt dann

Hüllreihen $\tilde{Q}_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_{jk} \tau_{Q_{jk}}$, sodass:

$$I(\tilde{Q}_k) \leq \|f_k\|_1 + \varepsilon_k$$

Dann ist $\tilde{Q} = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_{jk} \tau_{Q_{jk}}$ eine Hüllreihe für f .

und es gilt:

$$\|f\|_1 \leq I(\tilde{Q}) = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig und die Beh. folgt. $\square$

1.14 Fundamentallemma

Für die char. Fkt 1_A eines abg. Quaders gilt:

$$\|1_A\|_1 = \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx.$$

